

北京大学硕士论文

非凸泛函的奇异摄动
题 目： 与
带表面能的微结构

作 者： 余 欣 炜
学 号： 19701023
系 别： 数 学 科 学 学 院
专 业： 计 算 数 学
方 向： 偏 微 分 方 程 数 值 解
导 师： 应 隆 安， 李 治 平

北京大学数学科学学院

2000 年 5 月 8 日

摘要

本文主要考虑了两个互相关联的问题，即一类非凸泛函的奇异摄动问题以及晶体微结构带表面能量模型的构造和计算。本文共分三个部分：

第一部分 非凸泛函的奇异摄动

在本文的第一部分中，我们考虑了与描述液体相变的理论相关的一个非凸泛函的奇异摄动问题。并给出了一个较一般的结果。本部分共有三章。

在第一章中，我们对非凸泛函奇异摄动问题的背景和研究现状作了一个粗略的叙述。

在第二章中，我们对本文要用到的数学概念和结果进行了简要的介绍。

在第三章中，对一类非凸泛函的奇异摄动问题，我们推广了前人的结果，证明了一个较一般的定理。

第二部分 带表面能的微结构

在本文的第二部分中，我们对晶体相变的微结构问题进行了一些研究。我们利用第一部的思想建立了一个带表面能的微结构问题的数学模型，并进行了数值计算。本部分共有三章。

在第四章中，我们对晶体微结构的物理背景，数学理论及理论和计算的研究现状作了简要的叙述。

在第五章中，我们陈述了一些经典的结果，从形式上导出我们的计算模型。并证明了连续问题和离散问题解的存在性。

在第六章中，我们对计算所使用的数值方法进行了介绍。对可视化中的注意事项进行了说明，最后列出了计算结果。

第三部分

本文的第三部分是一些小的理论结果的证明和叙述。

在附录甲中，我们证明了关于 Young 测度的一个结果。

在附录乙中，我们介绍了在第一部分的证明中要用到的距离函数的定义和性质。

关键词: 非凸泛函, 奇异摄动, Γ -极限, 晶体微结构, 表面能量

符号和约定

这里我们罗列一下本文中要用到的记号和常数约定。

本文中要用到的符号:

$ f $:	f 的矢量模
$\ f\ $:	f 的 L^2 模
$\text{meas } E, E $:	集合 E 的 Lebesgue 测度
$\mathcal{H}^N(E)$:	集合 E 的 N 维 Hausdorff 测度
$\text{Div } g$:	函数 g 的散度
$\text{Per}_\Omega(E)$:	E 在 Ω 中的周长
$B(x, r)$:	以 x 为心, 以 r 为半径的开球

本文中用 C 来表示一个一般的常数。不同式子(即使它们相邻)中的 C 未必相同。

目 录

摘要	i
符号和约定	ii
第一部分 非凸泛函的奇异摄动	2
第一章 背景和研究现状	3
第二章 预备知识	5
§2.1 弱下半连续泛函	5
§2.2 有界变差函数空间	6
§2.3 Young 测度	8
§2.4 Γ -极限	8
第三章 一些理论结果	10
§3.1 几个引理	10
§3.2 紧性结果	16
§3.2.1 一维情况	17
§3.2.2 多维情况	19
§3.3 Γ -极限的证明	20
§3.3.1 一维情况	20
§3.3.2 多维情况	21
§3.4 附注	28
第二部分 带表面能的微结构	29
第四章 引言	30
第五章 数学模型	32
§5.1 几何非线性模型	32
§5.2 表面能量	34
§5.3 本文的计算模型	34
§5.3.1 模型的提出	34
§5.3.2 带表面能泛函之极小的存在性	35

§5.4 离散问题	36
§5.4.1 模型的离散化	36
§5.4.2 离散问题极小解的存在性	37
第六章 算法及数值结果	38
§6.1 网格变换方法	38
§6.2 数值计算模型及算法	39
§6.3 数值算法和可视化	40
§6.3.1 数值算法	40
§6.3.2 可视化	41
§6.4 数值例子	42
§6.4.1 加表面能后针状和分叉微结构的形成	42
§6.4.2 针状微结构的尺度和能量	42
§6.4.3 计算结果图示	44
第三部分 附录	49
附录甲 关于 Young 测度的一个小结果	50
附录乙 距离函数的性质简述	52
参考文献	53
致谢	59

第一部分

非凸泛函的奇异摄动

第一章 背景和研究现状

非凸多阱积分泛函的奇异摄动在材料科学和工程的很多领域，如塑性力学的梯度应力 (gradient strain) 理论，铁磁材料的磁畴结构理论 [70]，晶体微结构的表面能理论等等的相关数学问题中出现。例如在无相互反应混合流体相变的经典理论中（参见 [40], [41]），流体的稳定构成是如下问题的解：

$$\min \left\{ \int_{\Omega} W(u) dx : u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^d), \int_{\Omega} u dx = |\Omega| \left(\sum_{i=1}^r \theta_i a_i \right) \right\}$$

其中 Ω 为该流体所占据的区域。非负函数 W 是与流体某些性质相关联的单位 Gibbs 自由能， $\{u : W(u) = 0\} = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{R}^d$ ， a_i 表示该混合流体的某些特征量（如质量）在稳定态时的取值，($d = 1, r = 2$ 时的示意图见图 1.1) 而约束 $\int_{\Omega} u = \text{常数}$ 则表示了这些量在该混合流体中的守恒性质。求得的极小解即为该混合流体在稳定时其各成分的分布情况。

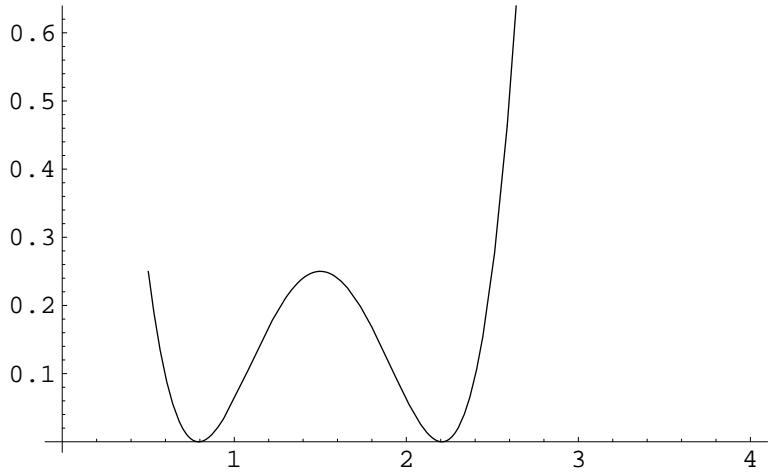


图 1.1: $d = 1, r = 2$ 时 $W(u)$ 的示意图

容易看到上述问题的解是不唯一的。这种不唯一性一般认为是模型中忽略了某些微小作用所致。根据所谓 Van Der Waals-Cahn-Hilliard 模型的精神 ([41])，我们考虑用加上作为惩罚的扰动项的方法来得到唯一性。这个扰动项一般包含一些高阶导

数，代表了不同项间形成交界面所需的能量。引入

$$J_\epsilon(u) = \int_{\Omega} (W(u) + h(\epsilon, x, Du, D^2u, \dots)) \, dx$$

其中当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时， $h \rightarrow 0$ 。我们考虑 ϵ 很小时 $J_\epsilon(u)$ 极小点的各种性质，并特别考虑当 $\epsilon \rightarrow 0$ 情况下 J_ϵ 及其极小点的极限状况。

在加上如上的扰动项后，我们希望某个合适的极限过程能够从原问题的无限多个解中选择出一个合理的解。这个极限过程就是所谓的 Γ -极限。自然地，我们还希望 J_ϵ 的 Γ -极限泛函有唯一解，并且该解也是未经扰动的原问题的解。

在上述思想的指导下，十几年来出现了很多结果。所有这些结果均证明了 J_ϵ 的 Γ -极限应为如下类型极小化问题的解：

$$\min \left\{ \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i, j \leq r}} S_{ij} m_{ij} : u \text{ 为未扰动问题的解} \right\}$$

其中 S_{ij} 为 u 分别取 a_i , a_j 两相的区域的交界面面积，而 m_{ij} 为对应于该交界的“单位表面能量”。

对扰动项为 $\epsilon^2 \int_{\Omega} |Du|^2 \, dx$ 的情况，Modica 在 [74] 中解决了 $d = 1, r = 2$ 的问题。P.Sternberg 在 [87] 中解决了 $d = 1, 2, r = 2$ 的情况，并将 a_i 推广到 \mathbb{R}^2 上不相交且围成的区域有包含关系的闭曲线。I.Fonseca 与 L.Tartar 在 [37] 中将与 [87] 之前一部分类似的结果推广到 $d = N$ 。S.Baldo 在 [3] 中推广了 [37]，解决了 $d > 1, r > 2$ 的一般情况。

R.V.Kohn 与 P.Sternberg 在 [59] 中对问题

$$\inf \int_{\Omega} \epsilon |Du|^2 + \epsilon^{-1} (u^2 - 1)^2 \, dx$$

进行了非常细致的分析，并将同样的结果推广到比上述更加一般的诸种情况。A.C.Barroso 和 I.Fonseca 在 [8] 中将扰动项推广到 $\epsilon^2 \int_{\Omega} h^2(x, Du(x)) \, dx$ 。I.Fonseca 和 C.Mantegazza 在 [36] 中解决了扰动项为 $\epsilon^4 \int_{\Omega} |D^2u|^2 \, dx$, $r = 2$ 的情况。

在本文第三章中，我们延续 [36] 和 [3] 的思路，并将其结果推广到 $d > 1, r > 2$ 且扰动项为 $\epsilon^{2k} \int_{\Omega} |D^k u|^2 \, dx$ 的情况。

第二章 预备知识

§2.1 弱下半连续泛函

许多物理问题的数学化都表现为在某个集合 \mathcal{A} 上对某个“能量”泛函 $I(u) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 求解其极小点的问题。极小点的存在性理论经常引出以下两个条件。

紧性条件：

定义 2.1.1 设 M 为一个 Hausdorff 空间，并设 $E : M \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ 。如下条件：

对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, 集合

$$K_\alpha = \{u \in M : E(u) \leq \alpha\}$$

是紧的（或列紧的）。

称为紧性条件。

下半连续条件：

定义 2.1.2 假设同上。如果所有集合

$$\{u \in M : E(u) > \alpha\}$$

是开的，则称 $E(u)$ 满足下半连续条件。

关于这两个条件的关系和抽象泛函 $I(u)$ 的极小点存在的一般理论，可以参考专著 [7] 和 [88]。

在绝大部分问题中，能量泛函可以写成积分形式，即 $I(u) = \int_{\Omega} W dx$ ，其中 $W = W(x, u, Du, \dots, D^k u)$ 称为能量密度。而 u 一般属于某个 Sobolev 空间或 BV 空间。在这种情况下，一般可以得到泛函的极小化序列在该空间中的一致有界性，从而进一步得出存在弱收敛的子列，于是此时（弱收敛意义下的）下半连续条件的验证要比紧性条件自然得多。关于 $I(u)$ 满足弱下半连续条件与 W 的性质之间的关系，有无数的研究。这些研究的主要结果可以在 [7], [24], [25], [32], [81] 和 [88] 中找到。一般称为补偿紧致的理论对积分泛函极小的存在性进行了更精细的分析，参见 [24], [32], [76], [77], [88], [90]。这些研究将弱下半连续性和被积函数在某些方向上的（某种意义上的）凸性联系起来。这里我们列举一些主要结果 ([25])。

定义 2.1.3 设 Ω 为 \mathbb{R}^n 中的有界开集， $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ， $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ ，如果对任意 $(x_0, u_0, A_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm}$ ，任意有界开集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 和任意的 $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^n)$ 有

$$\frac{1}{\text{meas } D} \int_D f(x_0, u_0, A_0 + \nabla \varphi(x)) dx \geq f(x_0, u_0, A_0)$$

则称 f 是拟凸的。

定理 2.1.4 所有假设同上, 如果 f 连续, 拟凸, 且对任意 $(x, u, A) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm}$ 满足

$$|f(x, u, A)| \leq a(x, |u|, |A|)$$

其中 a 对 x 局部可积, 且对后两个变量单调上升。则泛函

$$I(u, \Omega) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

在空间 $W^{1,\infty}$ 中弱 * 下半连续。

注 2.1.5 当 $m = 1$ 或者 $n = 1$ 的时候, 拟凸与凸是等价的。(凸函数的定义和性质可以参见 Rockafellar 的专著 [82])

注 2.1.6 用同样的方法可以证明: 对 $f(x, u, Du, \dots, D^k u)$, 只要 f 对最后一个变量是拟凸的, 则在适当的连续性条件下, 有和上述定理类似的结论。

§2.2 有界变差函数空间

在本文后面的章节中, 经常要用到一般的有界变差函数空间(即 BV 空间)的概念和性质。在这里我们作一略述。下面要用到的有关 Radon 测度的概念和性质请参看 [20] 或 [72]。

定义 2.2.1 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开集, 而 $f \in L^1(\Omega)$ 。定义

$$\int_{\Omega} |Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{Div} g dx \right\}$$

其中 $g = (g_1, \dots, g_n) \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 且对任意 $x \in \Omega$, 有 $\|g(x)\|_{l^\infty} \leq 1$ 。

定义 2.2.2 一个函数 $f \in L^1(\Omega)$ 被称作是在 Ω 中有有界变差的, 如果如上定义的 $\int_{\Omega} |Df| < \infty$ 。我们将 $L^1(\Omega)$ 中所有有界变差函数组成的空间写作 $BV(\Omega)$ 。

注 2.2.3 若 $f \in BV(\Omega)$, Df 是 f 在分布意义上的梯度, 则 Df 是一个向量值的 Radon 测度, 而 $\int_{\Omega} |Df|$ 是其在 Ω 上的全变差。由此我们可以定义 $\int_A |Df|$, 其中 $A \subset \Omega$ 不必是开集。

定义 2.2.4 设 E 为 \mathbb{R}^n 中的 Borel 集, Ω 为 \mathbb{R}^n 中的开集, 我们如下定义 E 在 Ω 中的周长:

$$\operatorname{Per}_{\Omega}(E) = \int_{\Omega} |D\chi_E|$$

其中 χ_E 指 E 的特征函数。

定义 2.2.5 如果一个 *Borel* 集合 E 在局部有有限周长, 即 $\text{Per}_\Omega(E) < +\infty$ 对任意有界开集 Ω 成立, E 即被称为 *Caccioppoli* 集合。

定义 2.2.6 设 E 为一个 *Caccioppoli* 集, 定义 E 的 *Reduced* 边界 ∂^*E 为满足下列条件的点 x 的集合:

- 1). $\int_{B(x,\rho)} |D\chi_E| > 0$, 对任意的 $\rho > 0$ 。
- 2). 极限 $\nu(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \nu_\rho(x)$ 存在。其中

$$\nu_\rho(x) := \frac{\int_{B(x,\rho)} D\chi_E}{\int_{B(x,\rho)} |D\chi_E|}$$

- 3). $|\nu(x)| = 1$

从测度微分的 Besicovitch 定理 ([33], 2.9), 我们知道对 $|D\chi_E|$ - 几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$, $\nu(x)$ 存在且 $|\nu(x)| = 1$ 成立。且在这些点我们进一步有:

$$D\chi_E = \nu |D\chi_E|$$

Reduced 边界有如下重要性质:

对任意的 *Caccioppoli* 集合 E , 我们有

$$\text{Per}_\Omega(E) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial^*E \cap \Omega)$$

下面是几个关于 BV 函数的重要定理。

定理 2.2.7 (下半连续性) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\{f_n\} \subset BV(\Omega)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ 。则 $f \in BV(\Omega)$, 且有

$$\int_\Omega |Df| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |Df_n|$$

定理 2.2.8 (紧性, 嵌入定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为使 Rellich 定理成立的有界开集。 $\{f_n\} \subset BV(\Omega)$ 且其 BV 模一致有界, 则 $\{f_n\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中准紧。

定理 2.2.9 (*Coarea* 公式) 设 $f \in BV(\Omega)$, 定义

$$F_t = \{x \in \Omega : f(x) < t\}$$

则

$$\int_\Omega |Df| = \int_{-\infty}^\infty dt \int_\Omega |D\chi_{F_t}|$$

定理 2.2.10 对任意的 *Caccioppoli* 集合 E 而言, 存在一列 C^∞ 集合 E_j , 使得

$$\int |\chi_E - \chi_{E_j}| dx \rightarrow 0, \quad \int |D\chi_{E_j}| \rightarrow \int |D\chi_E|$$

有关有界变差函数空间和点集边界的详细理论, 可以参考以下专著: [33], [38], [75], [98]。

§2.3 Young 测度

L.C.Young 在 [95] 和 [96] 中提出的 Young 测度作为一个有力工具在非线性问题的研究中被广泛使用。以非线性弹性理论为基础的物质微结构和相变的理论自不例外。下面我们对其作一简单介绍。

首先我们叙述一个便于使用的定理。

定理 2.3.1 (Ball, 1989). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界的勒贝格可测集, K 是 \mathbb{R}^s 中的闭集, $F^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^s, j = 1, 2, \dots$ 为勒贝格可测函数列, 且满足对任意包含 K 的开集 U , 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{meas}_j \{x \in \Omega : F^j(x) \notin U\} = 0.$$

则存在 F^j 的一个子列, 仍记作 F^j , 和一族 \mathbb{R}^s 上的正测度 $\{\nu_x\}, x \in \Omega$, 它们可测地依赖于 x , 并使得对任意满足

$$\lim_{|F| \rightarrow \infty} g(F) = 0$$

的连续函数 $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, 有

- (i) $\int_{\mathbb{R}^s} d\nu_x \leq 1, a.e.x \in \Omega$
- (ii) $\text{supp } \nu_x \subset K, a.e.x \in \Omega$, 以及
- (iii) $g(F^j(x)) \xrightarrow{*} \int_{\mathbb{R}^s} g(F) d\nu_x(F) \text{ in } L^\infty(\Omega)$

进一步, 如果 F^j 满足如下的有界条件:

存在某个连续不减的函数 $h : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$, 使得

$$\sup_j \int_{\Omega} h(|F^j|) dx < \infty$$

, 则在 (i) 中等号成立, 且对 Ω 的任意可测子集, 有

$$g(F^j) \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^s} g(F) d\nu_x(F) \text{ in } L^1(E)$$

对任意使 $g(F^j)$ 在 $L^1(E)$ 中弱相对紧的连续函数 $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ 成立。

上面定理的证明请见 [4]。

Young 测度描述了函数的振动性质。对其定义, 性质及诸多应用的论述可以在以下文献(及其参考文献)中找到: [4], [11], [24], [32], [81], [90]。其中 [81] 以 Young 测度的概念为基础, 系统地论述了泛函的弱下半连续理论。

§2.4 Γ -极限

本文的主要工作是对泛函的奇异摄动的一些分析和在此基础上一个可以用线性元计算的带表面能的模型的导出。和第一章中列出的那些文献中一样, 这些分析使

用了称为 Γ - 极限的理论。关于这个理论的详细 / 不详细论述可以参见 [7], [26], [44], [47], [49]。

下面我们叙述 $\Gamma(L^1)$ - 极限的两个等价定义。

定义 2.4.1 假设 $F_n : L^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow [-\infty, \infty]$, $u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 。定义 Γ - 上极限和 Γ - 下极限如下:

$$\Gamma(L^1) - \liminf F_n(u) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) : u_n \rightarrow u \text{ in } L^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \right\}$$

$$\Gamma(L^1) - \limsup F_n(u) := \inf \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) : u_n \rightarrow u \text{ in } L^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \right\}$$

如果 $\Gamma(L^1) - \liminf F_n(u) = \Gamma(L^1) - \limsup F_n(u)$, 则该极限值就被称为 F_n 在 u 的 $\Gamma(L^1)$ - 极限, 并被记作 $\Gamma(L^1) - \lim F_n(u)$ 。

进一步, 给定一族泛函 $F_\epsilon : L^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow [-\infty, \infty]$, $\epsilon > 0$, 如果 $u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$, 我们称 $\Gamma(L^1) - \lim F_\epsilon(u) = F(u)$, 如果对所有序列 $\epsilon_n \rightarrow 0^+$, 有 $F(u) = \Gamma(L^1) - \lim F_{\epsilon_n}(u)$ 。

定义 2.4.2 称 $F(u)$ 为 F_ϵ 在 u 的 $\Gamma(L^1)$ - 极限, 当且仅当

(i) 对所有满足 $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 且 $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ 的序列 $\{u_n\}$ 和 ϵ_n , 有

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{\epsilon_n}(u_n)$$

(ii) 对所有收敛到 0^+ 的序列 $\{\epsilon_n\}$, 存在一个函数列 $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$, 满足

$$F(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\epsilon_n}(u_n)$$

注 2.4.3 在上述定义中, $L^1(\Omega)$ 可以换成任何一个 Hausdorff 空间 X , 从而得到 $\Gamma(X)$ - 极限的定义。

这就是 Γ - 极限的两个常见的定义, 容易证明这两个定义是等价的。

第三章 一些理论结果

本章中我们将推导一个非凸泛函奇异摄动方面的理论结果。

考虑如下的问题:

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 为一个有界开区域。 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 满足如下性质:

1. $W(x) = 0 \iff x \in \{a_1, \dots, a_r\}$, 其中 $a_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, r$.
2. $W(x)$ 连续, 且在无穷远处有一次增长, 即存在 $C, R > 0$, 使得当 $|x| > R$ 时, 有 $W(x) > C|x| - 1/C$.

我们将推导如下泛函列的 Γ -极限:

$$\mathcal{F}_\epsilon(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{W(u)}{\epsilon} + \epsilon^{2k-1} |D^k u|^2 \right) dx$$

§3.1 几个引理

引理 3.1.1 设 $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为不降的凸函数, 令 J 为长度为整数或者 $+\infty$ 的区间, 则对任意的 $u \in L^1_{loc}(J, \mathbb{R}^d)$, $u^{(k)} \in L^1_{loc}(J, \mathbb{R}^d)$, 其中 $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, 我们有: 存在 $C = C(k) > 0$, 对 $\forall 1 \leq l \leq k-1$, 下式成立

$$\int_J \varphi \left(\frac{|u^{(l)}|}{(1+C)d} \right) dt \leq \frac{C}{C+1} \int_J \left(\varphi(|u|) + \varphi(|u^{(k)}|) \right) dt$$

证明 首先考虑 $d = 1$ 的情况。

给定 $u \in W^{k,1}(0, 1)$, 将 $(0, 1)$ 等分为 $2^{l+1}-1$ 个区间 $I_1, \dots, I_{2^{l+1}-1}$, 取定 2^l 个点

$$\theta_i^0 \in I_{2i-1} \quad i = 1, \dots, 2^l$$

记 θ_i^j 为满足

$$u^{(j)}(\theta_i^j) = \frac{u(\theta_{2i}^{j-1}) - u(\theta_{2i-1}^{j-1})}{\theta_{2i}^{j-1} - \theta_{2i-1}^{j-1}}, \quad i = 1, \dots, 2^{l-j}$$

的点, 其中 $j = 1, 2, \dots, l$ 。注意由 θ_i^0 的取法, 所有分母的绝对值都有仅依赖于 k 的公共下界。我们利用中值定理得到: 存在 $\eta \in (0, 1)$, $C = C(k) > 0$, 使得

$$|u^{(l)}(\eta)| \leq C \sum_{i=1}^{2^l} |u(\theta_i^0)|, \quad i = 1, \dots, 2^l$$

从而对任意的 $x \in (0, 1)$, 有

$$|u^{(l)}(x)| \leq C \sum_{i=1}^{2^l} |u(\theta_i^0)| + \int_0^1 |u^{(l+1)}(t)| dt$$

注意这个不等式对任意的 $\theta_i^0 \in I_{2i-1}$ 都成立。下面我们对上式在每个 I_{2i-1} 上对 θ_i^0 积分。得到：

$$|I_{2i-1}|^{2^l} |u^{(l)}(x)| \leq C \cdot |I_{2i-1}|^{2^l-1} \sum_{i=1}^{2^l} \int_{I_{2i-1}} |u(\theta_i^0)| d\theta_i^0 + |I_{2i-1}|^{2^l} \int_0^1 |u^{(l+1)}(t)| dt$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{2^l} \int_{I_{2i-1}} |u(\theta_i^0)| d\theta_i^0 = \sum_{i=1}^{2^l} \int_{I_{2i-1}} |u(t)| dt \leq \int_0^1 |u(t)| dt$$

我们有

$$|u^{(l)}(x)| \leq C \int_0^1 |u(t)| dt + \int_0^1 |u^{(l+1)}(t)| dt$$

对 $u^{(l+1)}$ 用上面的方法，可以得到：

$$|u^{(l+1)}(x)| \leq C \int_0^1 |u(t)| dt + \int_0^1 |u^{(l+2)}(t)| dt$$

代入上一式，即有

$$|u^{(l)}(x)| \leq C \int_0^1 |u(t)| dt + \int_0^1 |u^{(l+2)}(t)| dt$$

如是类推，易见可以找到仅依赖于 k 的常数 C ，使得

$$|u^{(l)}(x)| \leq C \int_0^1 |u(t)| dt + \int_0^1 |u^{(k)}(t)| dt$$

对任意的 $1 \leq l \leq k-1$ 成立。从而有：

$$\frac{1}{C+1} |u^{(l)}(x)| \leq \frac{C}{C+1} \int_0^1 |u(t)| dt + \frac{1}{C+1} \int_0^1 |u^{(k)}(t)| dt$$

注意到由嵌入定理， $u^{(l)}$ 是连续的，故上式是几乎处处成立的。

由于 φ 是凸而不降的，我们有

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{C+1} |u^{(l)}(x)|\right) &\leq \varphi\left(\frac{C}{C+1} \int_0^1 |u(t)| dt + \frac{1}{C+1} \int_0^1 |u^{(k)}(t)| dt\right) \\ &\leq \frac{C}{C+1} \varphi\left(\int_0^1 |u|(t) dt\right) + \frac{1}{C+1} \varphi\left(\int_0^1 |u^{(k)}(t)| dt\right) \\ &\leq \frac{C}{C+1} \left[\int_0^1 \varphi(|u|(t)) dt + \int_0^1 \varphi(|u^{(k)}(t)|) dt \right] \end{aligned}$$

对任意 $x \in (0, 1)$ 成立。将 x 从 0 到 1 积分，即得

$$\int_0^1 \varphi\left(\frac{|u|^{(l)}(t)}{C+1}\right) dt \leq \frac{C}{C+1} \int_0^1 \left(\varphi(|u|(t)) + \varphi(|u^{(k)}(t)|) \right) dt$$

将 J 等分为长为 1 的区间段，在每个区间段上用上面结论，再相加，即得所欲证之 $d = 1$ 情况。

对 $d \geq 2$ ，设 $u(t) = (u_1(t), \dots, u_d(t))$ ，我们有

$$\begin{aligned} \int_J \varphi \left(\frac{|u^{(l)}(t)|}{(1+C)d} \right) dt &\leq \int_J \varphi \left(\sum_{i=1}^d \frac{|u_i^{(l)}(t)|}{(1+C)d} \right) dt \\ &\leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \int_J \varphi \left(\frac{|u_i^{(l)}(t)|}{C+1} \right) dt \\ &\leq \frac{C}{(C+1)d} \sum_1^d \int_J \varphi(|u_i(t)|) + \varphi(|u_i^{(k)}(t)|) dt \\ &\leq \frac{C}{(C+1)d} \sum_1^d \int_J \varphi(|u|(t)) + \varphi(|u^{(k)}(t)|) dt \\ &= \frac{C}{C+1} \int_J [\varphi(|u|(t)) + \varphi(|u^{(k)}(t)|)] dt \end{aligned}$$

证毕 □

下面我们定义辅助函数： $G_i : \mathbb{R}^{kd} \rightarrow \mathbb{R}$ ， $i \in \{1, \dots, r\}$ ，集合 \mathcal{A}_{ij} ， $\tilde{\mathcal{A}}_{ij}$ 和常数 m_{ij} ， \tilde{m}_{ij} 。

$$G_i(z_0, \dots, z_{k-1}) := \inf_g \left\{ \int_0^1 (W(g(t)) + |g^{(k)}(t)|^2) dt \right\}$$

其中 $g(t) \in C^k([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ ， $g(0) = z_0, \dots, g^{(k-1)}(0) = z_{k-1}$ ； $g(1) = a_i, g^{(l)}(1) = 0, l = 1, \dots, k-1$

使用多项式做试验函数，即易见当 $z_0 \rightarrow a_i$ 且 $z_l \rightarrow 0$ 时，有 $G_i(z_0, \dots, z_{k-1}) \rightarrow 0$ 。

$$\mathcal{A}_{ij} := \left\{ f \in W_{loc}^{k,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d) : \exists C > 0, \text{ 当 } t < -C \text{ 时 } f(t) = a_i, \text{ 当 } t > C \text{ 时 } f(t) = a_j, i \neq j \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ij} := \left\{ f \in W_{loc}^{k,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d) : \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = a_i, \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = a_j \right\}$$

$$m_{ij} := \inf_f \left\{ \int_{\mathbb{R}} (W(f) + |f^{(k)}|^2) dt : f \in \mathcal{A}_{ij} \right\}$$

$$\tilde{m}_{ij} := \inf_f \left\{ \int_{\mathbb{R}} (W(f) + |f^{(k)}|^2) dt : f \in \tilde{\mathcal{A}}_{ij} \right\}$$

引理 3.1.2 对任意的 $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$, 我们有 $m_{ij} > 0$, 且 $m_{ij} = \tilde{m}_{ij}$

在证明引理之前, 我们首先引述 Nirenberg 在 [80] 中的一个结果。

定理 3.1.3 设 $u \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^n)$, 其 m 阶导数 $D^m u \in L^r$, $1 \leq q, r \leq \infty$ 。则对导数 $D^j u$, $0 \leq j < m$, 如下的不等式成立:

$$|D^j u|_p \leq C |D^m u|_r^\alpha |u|_q^{1-\alpha}$$

其中,

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q}$$

对所有的 α 满足 $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$ 。其中 C 依赖于 n, m, j, q, r, α 。

注 3.1.4 ([80]) 上述定理有如下例外情况:

1. 若 $j = 0$, $rm < n$, $q = \infty$, 则我们需要进一步假设或者 u 在无穷处趋于 0, 或者 $u \in L^{\tilde{q}}$, 对某个有限的 $\tilde{q} > 0$ 成立。
2. 若 $1 < r < \infty$, 且 $m - j - n/r$ 是一个非负整数, 则 α 需要满足 $j/m \leq \alpha < 1$ 。

下面我们证明引理 3.1.2。

证明 首先证明 $m_{ij} > 0$ 。我们用反证法。若 $m_{ij} = 0$, 设 f_n 为其极小化列。从而我们有 $f_n^{(k)} \rightarrow 0$ in L^2 。又由 Sobolev 嵌入定理, $f_n \in C^{k-1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ 。

令 $S = \{y : y \in \mathbb{R}^d, |y - a_i| = |a_i - a_j|/2\}$, 由 \mathcal{A}_{ij} 的定义我们有:

$$\begin{aligned} \exists M_n > 0, \quad &\text{使得 } f_n = a_j, \quad \text{对 } t > M_n \\ &f_n = a_i, \quad \text{对 } t < -M_n \end{aligned}$$

故存在 $t_n \in \mathbb{R}$ 使得 $f_n(t_n) \in S$, 易见我们可以设 $t_n = 0$ 。

在前面 Nirenberg 的定理 3.1.3 中取 $\alpha = \frac{j}{m}$, $r = 2$, $q = 1$, $m = k$, 得到 $p = \frac{2m}{2m-j}$ 。于是有 $\|f_n\|_{W^{k,2m/(2m-1)}}^2$ 有界, 再由嵌入定理知有子列 (仍然记作 f_n) 在任意有限区间 J 上依 $W^{k-1,\infty}$ 模收敛到某一个函数 $f \in W_{loc}^{k,2m/(2m-1)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, 满足 $f^{(k)} = 0$ in J , $f(0) \in S$ 。如此一来,

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(W(f_n) + |f_n^{(k)}|^2 \right) dt \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \left(W(f_n) + |f_n^{(k)}|^2 \right) dt \\ &\geq \int_J W(f) dt > 0 \end{aligned}$$

与我们的反证假设矛盾。从而 $m_{ij} > 0$ 得证。

下面我们证明 $m_{ij} = \tilde{m}_{ij}$ 。

显然 $m_{ij} \geq \tilde{m}_{ij}$ 。

下面证明相反方向的不等式。取定 $\delta > 0$, 及 $f \in \tilde{\mathcal{A}}_{ij} : \tilde{m}_{ij} + \delta > \int_{\mathbb{R}} (W(f) + |f^{(k)}|^2) dt$ 。我们构造一列 \mathcal{A}_{ij} 中的函数来逼近 $\tilde{m}_{ij} + \delta$ 。

取定 $\tau < |a_j - a_i|/2$, 考虑一个不降的凸函数 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, 满足

$$\varphi(t) < t^2, \forall t \in \mathbb{R}; \quad \varphi(|y|) < W(y + a_j), \forall y \in B(0, \tau) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^d$$

$$\varphi(t) = 0 \iff t = 0$$

容易证明这样的 φ 是存在的。

取 $R > 0$, 使得 $|f(t) - a_j| < \tau, \forall t > R$ 。对 $f - a_j$ 用引理 3.1.1 有

$$\int_R^{+\infty} \varphi \left(\frac{|f^{(l)}|}{(C+1)d} \right) < \frac{C}{C+1} \int_R^{+\infty} (W(f) + |f^{(k)}|^2) \leq \frac{C}{C+1} (\tilde{m}_{ij} + \delta)$$

可见 $\sum_{l=1}^{k-1} \varphi \left(\frac{|f^{(l)}|}{(C+1)d} \right)$ 在 $(R, +\infty)$ 上可积。于是存在 $x_n \rightarrow +\infty$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=1}^{k-1} \varphi \left(\frac{|f^{(l)}(x_n)|}{(C+1)d} \right) + |f(x_n) - a_j| \right] = 0$$

由于 φ 是单调的, 且仅在 $x = 0$ 处为 0, 我们有:

$$\sum_{l=1}^{k-1} |f^{(l)}(x_n)| + |f(x_n) - a_j| \rightarrow 0$$

类似, 我们可以得到: 存在 $y_n \rightarrow -\infty$ 满足

$$\sum_{l=1}^{k-1} |f^{(l)}(y_n)| + |f(y_n) - a_i| \rightarrow 0$$

下面取 $g_m(t) = \tilde{g}_m(t - x_m)$, $h_m(t) = \tilde{h}_m(t - y_m + 1)$ 。其中 \tilde{g}_m , \tilde{h}_m 为 G_i , G_j 定义中容许的函数, 满足

$$\int_0^1 (W(\tilde{g}_m) + |\tilde{g}_m^{(k)}|^2) dt \leq G_j(f(x_m), \dots, f^{(k-1)}(x_m)) + \delta$$

$$\int_0^1 (W(\tilde{h}_m) + |\tilde{h}_m^{(k)}|^2) dt \leq G_i(f(y_m), \dots, f^{(k-1)}(y_m)) + \delta$$

令 $\tilde{f}_m(t) = \begin{cases} a_j & t \geq x_m + 1 \\ g_m(t) & t \in [x_m, x_m + 1] \\ f(t) & t \in (y_m, x_m) \\ h_m(t) & t \in [y_m - 1, y_m] \\ a_i & t \leq y_m - 1 \end{cases}$, 则我们有:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{ij} + \delta &> \int_{\mathbb{R}} (W(f) + |f^{(k)}|^2) dt \\ &> \int_{x_m}^{y_m} (W(f) + |f^{(k)}|^2) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (W(\tilde{f}_m) + |\tilde{f}_m^{(k)}|^2) dt - \int_{x_m}^{x_m+1} (W(g_m) + |g_m^{(k)}|^2) dt \\ &\quad - \int_{y_m-1}^{y_m} (W(h_m) + |h_m^{(k)}|^2) dt \\ &\geq m_{ij} - G_j(f(x_m), \dots, f^{(k-1)}(x_m)) - G_i(f(y_m), \dots, f^{(k-1)}(y_m)) \\ &\rightarrow m_{ij} \end{aligned}$$

于是有: $\tilde{m}_{ij} \geq m_{ij}$ 。

最后我们证明这个最小值是可以达到的。

设 $\{f_n\}$ 为 \tilde{m}_{ij} 的一个极小化序列。不妨可以设 $f_n(0) \in S$, 且 $\{f_n\}$ 在 $W^{k-1,\infty}$ 中收敛到 $f \in C^{k-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, 易见 $f(0) \in S$ 。若 f 可容许, 则由 Fatou 引理及 L^2 模的凸性易见 f 即为极小点。下面我们证明 f 是可容许的, 即 $f \in \tilde{\mathcal{A}}_{ij}$ 。

令 $L = \{l \in \mathbb{R}^d \mid l \text{ 为 } f(t) \text{ 当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时的极限点}\}$, 由于 $W(f)$ 可积, 容易知道 a_i 或 a_j 在 L 中。不妨 $a_j \in L$ 。且另有 $l \neq a_i$ 在 L 中。(若 $a_i \in L$, 则由 f_n 的连续性, 及 S 的紧性, 知存在 $l \in S, l \in L$ 。)考虑两个单调上升的点列 $\{x_i\}, \{z_i\}$, $x_{i+1} - x_i \geq 3$, $z_i \in [x_i + 1, x_{i+1} - 1]$, $f(x_i) \rightarrow a_j$, $f(z_i) \rightarrow l$ 。对 $\forall 0 < \delta < \min\{|l - a_i|, |l - a_j|\}$ 引入

$$\hat{m} = \inf \left\{ \int_x^y (W(g) + |g^{(k)}|^2) dx : y - x \geq 3, z \in [x + 1, y - 1], |g(z) - l| \leq \delta \right\}$$

其中 $g \in W^{k,2}((x, y); \mathbb{R}^d)$ 。下证 $\hat{m} = 0$ 。

反之, 设 $\hat{m} > 0$ 。由 z_n 的性质必存在 n_0 , 对 $\forall n > n_0$, $|f(z_n) - l| < \delta$, 于是

$$\int_{\mathbb{R}} (W(f) + |f^{(k)}|^2) dx \geq \sum_{n_0}^{+\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (W(f) + |f^{(k)}|^2) dx = +\infty$$

矛盾!

设 $g_n \in W^{k,2}((x_n, y_n); \mathbb{R}^d)$ 极小化 \hat{m} ，无妨 $z_n = 0$ ，从而 $x_n \leq -1, y_n \geq 1$ 。无妨 $g_n \rightarrow g$ in $W^{k-1,\infty}$ ，用与上面证明中同样的方法可以导出与 $\hat{m} > 0$ 矛盾。

于是当 $t \rightarrow +\infty$ 时， $f_n \rightarrow a_j$ ，

同理，若 $a_i \in L$ ，则 $f \rightarrow a_i, t \rightarrow +\infty$ 。对 $t \rightarrow -\infty$ 可以作与上述同样的推导。

下面只需证不会有 $f \rightarrow a_i, t \rightarrow \pm\infty$ 或 $f \rightarrow a_j, t \rightarrow \pm\infty$ 。

设 $\lim_{\pm\infty} f = a_i$ ，则存在 $x_n \rightarrow +\infty$ ，使得 $\sum_{i=1}^{k-1} |f^{(i)}(x_n)| + |f(x_n) - a_i| \rightarrow 0$ ，从而我们可以找到极小化列 $\{f_n\}$ 的一个子列（仍记作 $\{f_n\}$ ），使得 $\sum_{i=1}^{k-1} |f_n^{(i)}(x_n)| + |f_n(x_n) - a_i| \rightarrow 0$ 。从而有

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_{\mathbb{R}} (W(f) + |f^{(k)}|^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (W(f_n) + |f_n^{(k)}|^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{x_n} (W(f_n) + |f_n^{(k)}|^2) + \int_{x_n}^{+\infty} (W(f_n) + |f_n^{(k)}|^2) \right) \end{aligned}$$

利用与前面证明 $m_{ij} = \tilde{m}_{ij}$ 时相同的构造方法，我们得到：

$$\begin{aligned} \text{上式} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{x_n} (W(f_n) + |f_n^{(k)}|^2) + \tilde{m}_{ij} - G_i(f_n(x_n), \dots, f_n^{(k-1)}(x_n)) \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{x_n} (W(f_n) + |f_n^{(k)}|^2) + \tilde{m}_{ij} \end{aligned}$$

容易知道右边两项中的第一项大于 0。矛盾。

证毕 □

注 3.1.5 能量均分：

设 f 为上面定理中极小的达到者，定义 $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$ ，则

$$\int_{\mathbb{R}} (W(f) + |f^{(k)}|^2) dt \leq \int_{\mathbb{R}} (W(f_\lambda) + |f_\lambda^{(k)}|^2) dt$$

对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立，设 $I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} (W(f_\lambda) + |f_\lambda^{(k)}|^2) dt$ ，于是 $\lambda = 1$ 为 $I(\lambda)$ 的极值点，从而我们有

$$\int_{\mathbb{R}} W(f) = (2k - 1) \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}|^2$$

在后面的构造中我们将会看到，上式左右两侧分别代表了两相交界面处的 Gibbs 自由能密度和表面能量密度。

§3.2 紧性结果

本节我们建立极小化序列的紧性。

§3.2.1 一维情况

定理 3.2.1 设 I 为 \mathbb{R} 上的有界开区间，若 $u_\epsilon \in W^{k,2}(I; \mathbb{R}^d)$ ， $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u_\epsilon) < +\infty$ ，则存在子列 $\{u_{\epsilon_n}\}$ 和 $u \in BV(I; \{a_1, a_2, \dots, a_r\})$ ，使得 $u_{\epsilon_n} \rightarrow u$ in $L^1(I; \mathbb{R}^d)$ 。

证明 设 $\liminf \mathcal{F}_\epsilon(u_\epsilon) = K < +\infty$ ，其子列 $\{u_{\epsilon_n}\}$ 满足 $\lim \mathcal{F}_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) = K$ ，则容易知道 $\{u_{\epsilon_n}\}$ 满足前述 Ball 定理中的条件，于是存在子列（仍记作 u_{ϵ_n} ）和 Young 测度 $\nu_t(y)$ ，对任意的连续函数 f ，有

$$f(t, u_n) \rightharpoonup \bar{f} = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, y) d\nu_t(y)$$

令 $f(y) = \min\{W(y), 1\}$ ，则容易知道

$$\nu_t(y) = \sum_{i=1}^r \theta_i(t) \delta_{y=a_i}$$

下证 $\theta_i \in \{0, 1\}$ ， $i = 1, \dots, r$ 。

定义

$$X_{ij} = \left\{ t \in I; \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \theta_k(s) ds \in (0, 1), \quad k = i, j, \quad \forall \delta > 0 \right\}$$

我们来证明 X_{ij} 是有限集合。

设存在 $l > 1$ 个 X_{ij} 中互不相同的点 $\{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ ，并记 $\delta_0 = \min\{|s_m - s_{m+1}|\}$ 。取 $\delta_1 < \delta_0/2$ 使得：对所有 $\delta < \delta_1$ 和所有 $m \in \{1, \dots, l\}$ ，

$$\int_{s_m-\delta}^{s_m+\delta} \theta_i(s) ds > 0, \quad \int_{s_m-\delta}^{s_m+\delta} \theta_j(s) ds > 0$$

固定 $0 < \eta < |a_j - a_i|/2$ ，设 φ_η ， ψ_η ， γ_η 分别为 $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 上满足如下条件的光滑函数：

$$\text{supp } \varphi_\eta \subset B(a_i, \eta), \quad \varphi_\eta(a_i) = 1$$

$$\text{supp } \psi_\eta \subset B(0, \eta), \quad \psi_\eta(0) = 1$$

$$\text{supp } \gamma_\eta \subset B(a_j, \eta), \quad \gamma_\eta(a_j) = 1$$

由于 $\mathcal{F}_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n})$ 一致有界，我们有 u_{ϵ_n} 和 $\epsilon_n^{-2} u_{\epsilon_n}^{(k)}$ 分别在 $L^1(I)$ 和 $L^2(I)$ 中一致有界。在前面 Nirenberg 的定理 3.1.3 中取 $\alpha = i/k$, $r = 2$, $q = 1$ 我们知道，对任意的 i ，令 $n_i = 2i$, $i = 1, \dots, k-1$ ，就有 $\epsilon_n^{n_i} u_{\epsilon_n}^{(i)} \rightarrow 0$ in $L^1(I)$ ，于是有 $\psi_\eta(\epsilon_n^{n_i} u_{\epsilon_n}^{(i)}) \rightarrow \psi_\eta(0)$ in L^1 ，又由定理 2.3.1, $\varphi_\eta(u_{\epsilon_n})$ 在 L^∞ 中弱 * 收敛到 $\theta_i \varphi_\eta(a_i) + \theta_j \varphi_\eta(a_j) = \theta_i$ ，而 $\gamma_\eta(u_{\epsilon_n})$ 在 L^∞ 中弱 * 收敛到 θ_j 。易见对每个 $m \in \{1, \dots, l\}$ 和每个 n ，存在 $x_{n,m}^+, x_{n,m}^- \in (s_m - \delta_1, s_m + \delta_1)$ （不妨 $x_{n,m}^- < x_{n,m}^+$ ）使得

$$u_{\epsilon_n}(x_{n,m}^+) \in B(a_j, \eta), \quad u_{\epsilon_n}(x_{n,m}^-) \in B(a_i, \eta)$$

$$|\epsilon_n^{n_i} u_{\epsilon_n}^{(i)}(x_{n,m}^+)| < \eta, \quad |\epsilon_n^{n_i} u_{\epsilon_n}^{(i)}(x_{n,m}^-)| < \eta$$

定义

$$g_{n,m}(t) = \widehat{g}_{n,m} \left(t - \frac{x_{n,m}^+}{\epsilon_n} \right), \quad h_{n,m}(t) = \widehat{h}_{n,m} \left(t - \frac{x_{n,m}^-}{\epsilon_n} + 1 \right)$$

其中 $\widehat{g}_{n,m}$, $\widehat{h}_{n,m}$ 满足

$$\int_0^1 \left(W(\widehat{g}_{n,m}) + |\widehat{g}_{n,m}^{(k)}|^2 \right) < G_i(u_{\epsilon_n}(x_{n,m}^+), \epsilon_n^{n_1} u'_{\epsilon_n}(x_{n,m}^+), \dots, \epsilon_n^{n_{k-1}} u_{\epsilon_n}^{(k-1)}(x_{n,m}^+) + \epsilon_n$$

$$\int_0^1 \left(W(\widehat{h}_{n,m}) + |\widehat{h}_{n,m}^{(k)}|^2 \right) < G_j(u_{\epsilon_n}(x_{n,m}^-), \epsilon_n^{n_1} u'_{\epsilon_n}(x_{n,m}^-), \dots, \epsilon_n^{n_{k-1}} u_{\epsilon_n}^{(k-1)}(x_{n,m}^-) + \epsilon_n$$

我们如下修改 u_{ϵ_n} :

$$v_{n,m}(t) = \begin{cases} a_j & t \geq \frac{x_{n,m}^+}{\epsilon_n} + 1 \\ \widehat{g} & t \in [\frac{x_{n,m}^+}{\epsilon_n}, \frac{x_{n,m}^+}{\epsilon_n} + 1] \\ u_{\epsilon_n} & t \in [\frac{x_{n,m}^-}{\epsilon_n}, \frac{x_{n,m}^+}{\epsilon_n}] \\ \widehat{h} & t \in [\frac{x_{n,m}^-}{\epsilon_n} - 1, \frac{x_{n,m}^-}{\epsilon_n}] \\ a_i & t \leq \frac{x_{n,m}^-}{\epsilon_n} - 1 \end{cases}$$

从 n_i 的取法知道 $v_{n,m} \in W_{loc}^{k,2}(\mathbb{R})$ 于是

$$\begin{aligned} K &\geq \liminf_{\epsilon_n \rightarrow 0^+} \sum_{m=1}^l \int_{x_{n,m}^-}^{x_{n,m}^+} \left(\frac{1}{\epsilon_n} W(u_{\epsilon_n}) + \epsilon_n^{2k-1} |u_{\epsilon_n}^{(k)}|^2 \right) dt \\ &= \liminf_{\epsilon_n \rightarrow 0^+} \sum_{m=1}^l \int_{\frac{x_{n,m}^-}{\epsilon_n}}^{\frac{x_{n,m}^+}{\epsilon_n}} \left(W(v_{n,m}) + |v_{n,m}^{(k)}|^2 \right) dt \\ &\geq \min \{m_{ij}\} l - \limsup_{\epsilon_n \rightarrow 0^+} \sum_{m=1}^l [G_j(u_{\epsilon_n}(x_{n,m}^-), \epsilon_n^{n_1} u_{\epsilon_n}(x_{n,m}^-), \dots) + \\ &\quad G_i(u_{\epsilon_n}(x_{n,m}^+), \epsilon_n^{n_1} u_{\epsilon_n}(x_{n,m}^+), \dots)] \end{aligned}$$

其中 $m := \min \{m_{ij}\} > 0$ 。

令 $\eta \rightarrow 0^+$, 我们得到 $K \geq ml$, 于是 X 是有限集合。

故我们有 $u \in BV$ 且 $u_{\epsilon_n} \rightarrow u$ in L^1 。

证毕

□

§3.2.2 多维情况

定理 3.2.2 若 $u_\epsilon \in W^{k,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ，满足 $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u_\epsilon) \leq +\infty$ ，则存在子列 $\{u_{\epsilon_n}\}$ 和 $u \in BV(\Omega; \{a_1, \dots, a_r\})$ ，使得

$$u_{\epsilon_n} \rightarrow u \text{ in } L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$$

我们首先介绍 δ -接近的概念和一个引理 ([36])：

定义 3.2.3 两个函数列 $\{u_\epsilon\}$, $\{v_\epsilon\}$ 被称为是 δ -接近的，如果 $\|u_\epsilon - v_\epsilon\| < \delta$

我们并以 $u(y, z) : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ 为例定义所谓“切片函数”如下。其中 I, J 是开区间。对任意的 $y \in I$ 我们定义 $u^y(z) := u(y, z)$ ，而对任意的 $z \in J$ 我们定义 $u^z(y) := u(y, z)$ ，并称 u^y 和 u^z 为 u 的一维切片。

引理 3.2.4 设 $\{u_n\}$ 是等可积的 ([25])，且对任意 $\delta > 0$ 存在序列 $\{v_n\}, \{w_n\}$ δ -接近 $\{u_n\}$ ，且 $\{v_n^y\}$ 对几乎处处的 $y \in I$ 在 $L^1(J; \mathbb{R}^d)$ 中准紧， $\{w_n^z\}$ 对几乎处处的 $z \in J$ 在 $L^1(I; \mathbb{R}^d)$ 中准紧。则 $\{u_n\}$ 在 $L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 中准紧。

下面我们证明定理。

证明 无妨设 $N = 2$ 。并首先假设 $\Omega = I \times J$ ，其中 I, J 为开区间。我们定义如下的 一维泛函 $\mathcal{F}_\epsilon^1(u, A)$:

$$\mathcal{F}_\epsilon^1(u, A) := \begin{cases} \int_A \left(\frac{W(u)}{\epsilon} + \epsilon^{2k-1} |u^{(k)}|^2 \right) dt & \text{如果 } u \in W^{k,2}(A; \mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{如果 } u \in L^1(A; \mathbb{R}^d) \setminus W^{k,2}(A; \mathbb{R}^d) \end{cases}$$

其中 $u \in L^1(A; \mathbb{R}^d)$ 而 A 是一个开区间。

已知 $u \in W^{k,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ，利用 C^∞ 函数逼近之，就知道有对几乎处处的 $y \in I$ ， $u^y \in W^{k,2}(J)$ ；而对几乎处处的 $z \in J$ ， $u^z \in W^{k,2}(I)$ 。且有

$$\frac{\partial^k u}{\partial z^k}(x) = \frac{d^k u^y}{dz^k}(z), \quad \frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x) = \frac{d^k u^z}{dy^k}(y), \quad \text{对 a.e. } x \in \Omega$$

由此我们容易得到：

$$\mathcal{F}_\epsilon(u) \geq \int_I \mathcal{F}_\epsilon^1(u^y, J) dy, \quad \mathcal{F}_\epsilon(u) \geq \int_J \mathcal{F}_\epsilon^1(u^z, I) dz$$

现在考虑一族函数 $\{u_\epsilon\}$ ，满足 $\mathcal{F}_\epsilon(u_\epsilon) < C < +\infty$ 。于是 $\int_\Omega W(u_\epsilon) dx < C\epsilon$ ，我们有 $W(u_\epsilon) \rightarrow 0$ in L^1 ，从而由 (H2) 我们得到 u_ϵ 的等可积性。现取定 $\delta > 0$ ，取 $\delta' \in (0, \delta)$ 满足

$$|S| < \delta' |J| \implies \sup_{\epsilon > 0} \int_S (|u_\epsilon(x)| + |a_1|) dx < \delta$$

对 $\epsilon > 0$ ，我们如下定义 $v_\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$v_\epsilon^y(z) := \begin{cases} u_\epsilon^y(z) = u_\epsilon(y, z) & \text{如果 } \mathcal{F}_\epsilon^1(u_\epsilon^y, J) < C/\delta' \\ a_1 & \text{其它} \end{cases}$$

设 $Z_\epsilon := \{x : v_\epsilon^y \neq u_\epsilon^y\}$ ，由于

$$C > \sup_{\epsilon > 0} \int_I \mathcal{F}_\epsilon^1(u_\epsilon^y, J) dy,$$

故有

$$|Z_\epsilon| \leq |\{\mathcal{F}_\epsilon^1(u_\epsilon^y, J) > C/\delta'\}| \leq \frac{\delta'}{C} \int_I \mathcal{F}_\epsilon^1(u_\epsilon^y, J) dy \leq \delta',$$

从而有

$$\|u_\epsilon - v_\epsilon\|_1 < \int_{Z_\epsilon \times J} |u_\epsilon(x) - a_1| dx < \int_{Z_\epsilon \times J} (|u_\epsilon(x)| + |a_1|) dx < \delta$$

对任意 $\epsilon > 0$ 成立。从而我们有 $\{v_\epsilon\}$ δ -接近 $\{u_\epsilon\}$ 。我们容易得到 $\{v_\epsilon\}$ 的准紧性 ([25])。类似的，我们可以构造 $\{w_\epsilon\}$ δ -接近 $\{u_\epsilon\}$ ，且对于任意的 $z \in J$ 在 $L^1(I; \mathbb{R}^d)$ 中准紧。于是由上面的引理 3.2.4 我们得到 u_ϵ 在 $L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ 中准紧。

证毕 □

§3.3 Γ -极限的证明

§3.3.1 一维情况

命题 3.3.1 若 $u_\epsilon \in W^{k,2}(I; \mathbb{R}^d)$ ， $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u_\epsilon) < +\infty$ ，则存在子列 $\{u_{\epsilon_n}\}$ 和 $u \in BV(I; \{a_i\})$ ，使得 $u_{\epsilon_n} \rightarrow u$ in $L^1(I; \mathbb{R}^d)$ ，且进一步有：

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u_\epsilon) \geq \sum_{i,j} m_{ij} \operatorname{Per}_I(\{u = a_i\} \cap \{u = a_j\})$$

证明 定理的前一部分已经在上一节中证明了。而后一部分是上节定理证明过程的简单推论。

证毕 □

定理 3.3.2 若 $u \in BV(I; \{a_1, \dots, a_r\})$ ，则

$$\Gamma - \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u) \leq \sum_{i,j} m_{ij} \operatorname{Per}_I(\{u = a_i\} \cap \{u = a_j\})$$

证明 设 u 的跳跃点为: $S(u) = \{s_1, \dots, s_l\} \subset I = (\alpha, \beta)$, $\alpha < s_1 < \dots < s_l < \beta$ 。令 $\delta_0 = \min \{s_{j+1} - s_j : j = 0, \dots, l\}$, 其中 $s_0 = \alpha$, $s_{l+1} = \beta$, 且令 $I_i = [\frac{s_{i-1}+s_i}{2}, \frac{s_i+s_{i+1}}{2}]$, $i = 1, \dots, l$ 。取定 $\delta \in (0, \delta_0)$ 并取 $f_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$, 满足

$$\int_{\mathbb{R}} (W(f_{ij}) + |f_{ij}^{(k)}|^2) dt \leq m_{ij} + \delta$$

取 $\epsilon_n \rightarrow 0^+$, 并取 n 足够大, 使得 $\frac{\delta}{2\epsilon_n} > M$ 。

定义

$$u_n(t) = \begin{cases} f_{ij}\left(\frac{t-s_i}{\epsilon_n}\right) & t \in [\frac{s_{i-1}+s_i}{2}, \frac{s_i+s_{i+1}}{2}], [u](s_i) = a_j - a_i \\ f_{ij}\left(-\frac{t-s_i}{\epsilon_n}\right) & t \in [\frac{s_{i-1}+s_i}{2}, \frac{s_i+s_{i+1}}{2}], [u](s_i) = a_i - a_j \\ u(t) & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $[u](s_i) := u(s_i) - u(s_{i-1})$ 。于是我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\epsilon(u_n) \leq \sum_{i,j} m_{ij} \operatorname{Per}_I(\{u = a_i\} \cap \{u = a_j\}) + l\delta$$

从而易证。

证毕 □

§3.3.2 多维情况

定理 3.3.3 设 $u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 。若 $\Gamma-\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u) < +\infty$, 则 $u \in BV(\Omega; \{a_1, \dots, a_r\})$, 且

$$\Gamma-\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq r} m_{ij} \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega)$$

为了证明这个定理, 我们需要做一些准备工作。

定义集合

$$\mathcal{A}_{\xi_1, \xi_2} := \left\{ g(t) \mid g \in W_{loc}^{k,2}(\mathbb{R}), \exists M > 0, \text{ 当 } t > M \text{ 时, } g(t) = \xi_2; \text{ 当 } t < -M \text{ 时, } g(t) = \xi_1 \right\}$$

接着我们定义如下的度量。

$$d(\xi_1, \xi_2) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} (W(r(t)) + |r^{(k)}(t)|^2) dt, r(t) \in \mathcal{A}_{\xi_1, \xi_2} \right\}$$

定义到 a_i 的距离函数 $\varphi_i(\xi) = d(\xi, a_i)$ 。

设 μ , ν 为两个正的正则 Borel 测度 ([72]), 我们依 [3] 定义其极大 $\mu \vee \nu$ 如下:

$$(\mu \vee \nu)(A) = \sup \left\{ \mu(A') + \nu(A'') : A' \cap A'' = \emptyset, A' \cup A'' \subset A, A', A'' \text{ 是 } \Omega \text{ 中的开集.} \right\}$$

其中 $A \in \Omega$ 是任意的开集。

设 $u(x)$ 使得 $W(u(x)) = 0 \quad a.e.in \Omega$ ，则 $u(x) = \sum_{i=1}^r a_i \chi_{S_i}(x)$ ，其中 $S_1, \dots, S_r \subset \Omega$ ，两两不交，且 $|\Omega \setminus \cup_1^r S_i| = 0$ 。下面我们引述 [3] 中的一个命题。

命题 3.3.4 设 $\varphi_i \circ u \in BV(\Omega)$ ，记 μ_i 为如下的 Borel 测度： $\mu_i : E \rightarrow \int_E |D(\varphi_i \circ u)|$ ，则我们有 $\text{Per}_\Omega(S_i) < +\infty$ 对 $i = 1, \dots, r$ 成立，且有

$$(\vee_{i=1}^r \mu_i)(\Omega) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} d(a_i, a_j) \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega)$$

注意到 $d(a_i, a_j)$ 的定义，我们有

$$(\vee_{i=1}^r \mu_i)(\Omega) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} m_{ij} \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega)$$

现在我们来证明定理。

证明 设 $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ ， $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ 且 $\mathcal{F}_{\epsilon_n}(u_n)$ 收敛到 $\Gamma - \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u) < +\infty$ 。取定一个单位向量 $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$ ，我们无妨假设 $u_n|_{L_{y,\nu} \cap \Omega} \rightarrow u|_{L_{y,\nu} \cap \Omega}$ in $L^1(L_{y,\nu} \cap \Omega)$ ，对几乎处处的 $L_{y,\nu} := \{y + s\nu : s \in \mathbb{R}\}$ 和 $y \in \mathbb{R}^N$ 成立。令

$$u_n^{y,\nu}(t) := u_n(y + t\nu) \text{ 对 } \mathcal{H}^{N-1} \text{ a.e. } y \in \nu^\perp$$

我们注意到前面的一维结果实际上证明了，对任意的 $i \in \{1, \dots, k\}$ ，

$$|D(\varphi_i \circ u)^{y,\nu}(L_{y,\nu} \cap \Omega)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{L_{y,\nu} \cap \Omega} \left(\frac{W(u_n^{y,\nu})}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} \left| \frac{d^k u_n^{y,\nu}}{dt^k} \right| \right) dt$$

于是，令 $v_i = \varphi_i \circ u$ ，则由 Fatou 引理及 BV 函数的 Slicing 性质有：

$$\begin{aligned} |D(v_i)|(\Omega) &= \int_{y \in \nu^\perp} |Dv_i^{y,\nu}|(L_{y,\nu} \cap \Omega) d\mathcal{H}^{N-1}(y) \\ &\leq \int_{y \in \nu^\perp} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{L_{y,\nu} \cap \Omega} \left(\frac{W(u_n^{y,\nu})}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} \left| \frac{d^k u_n^{y,\nu}}{dt^k} \right| \right) dt d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{y \in \nu^\perp} \int_{L_{y,\nu} \cap \Omega} \left(\frac{W(u_n)}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} |D^k u_n|^2 \right) dt d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\frac{W(u_n)}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} |D^k u_n|^2 \right) dx \\ &= \Gamma - \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u) \end{aligned}$$

由此我们得到 $\varphi_i \circ u \in BV(\Omega)$ 。从 \vee 的定义可以看出 $\vee_{i=1}^r \mu_i$ 是大于各 μ_i 的最小测度，于是容易知道

$$\vee_{i=1}^k v_i \leq \Gamma - \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u)$$

再由前面命题我们得到

$$\Gamma - \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq r} m_{ij} \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega)$$

证毕 □

定理 3.3.5 对每个函数 $u \in BV(\Omega; \{a_1, \dots, a_r\})$ ，我们有

$$\Gamma - \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq r} m_{ij} \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* S_i \cap \partial^* S_j \cap \Omega)$$

我们首先证明 $r = 2$ 的情形，并将其作为一个引理。记 $a = a_1$ ， $b = a_2$ ， $m = m_{12}$ ， $E = S_1$ 。

引理 3.3.6 对每个函数 $u \in BV(\Omega; \{a, b\})$ ，我们有

$$\Gamma - \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}_\epsilon(u) \leq m \operatorname{Per}_\Omega(\{u = a\})$$

证明 设 $u \in BV(\Omega; \{a, b\})$ ，即 $u = a\chi_E + b(1 - \chi_E)$ ，其中 E 满足 $\operatorname{Per}_\Omega(E) = |D\chi_E|(\Omega) < +\infty$ 。我们首先考虑 $E = \tilde{E} \cap \Omega$ ，其中 \tilde{E} 是 \mathbb{R}^N 中得有界光滑集的情况。

我们记 $\partial\tilde{E} = M$ 。由于 M 是光滑曲面，故存在 $\delta_0 > 0$ ，使得对任意 $\delta < \delta_0$ ，存在一个从 $U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, M) < \delta\}$ 到 M 的光滑投影。令 $\epsilon_n \rightarrow 0$ ，取 $v_n \in W_{loc}^{k,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ 满足

$$v_n(t) = \begin{cases} a & t < -\delta_n/\epsilon_n \\ b & t \geq \delta_n/\epsilon_n \end{cases}$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (W(v_n) + |v_n^{(k)}|^2) dt = m$ 。定义 $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 如下：

$$u_n(x) := \begin{cases} v_n\left(\frac{\tilde{d}_M(x)}{\epsilon_n}\right) & x \in U_n \cap \Omega \\ a & x \in E \setminus U_n \\ b & x \in \Omega \setminus (E \cup U_n) \end{cases}$$

其中 $\tilde{d}_M : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 是 M 的带符号距离函数（参见附录乙）。 \tilde{d}_M 在 \tilde{E} 内小于 0，而 $U_n := U_{\delta_n}$ 。我们按如下的条件来选取 δ_n ：

$$\delta_n \rightarrow 0, \quad \delta_n/\epsilon_n \rightarrow 0$$

容易看到上面的 u_n 是属于 $W^{k,2}(\Omega)$ 的。于是我们有：

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{F}}_{\epsilon_n}(u_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\frac{W(u_n)}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} |D^k u_n|^2 \right) dx \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{U_n} \frac{W(v_n(\tilde{d}_M(x)/\epsilon_n))}{\epsilon_n} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{U_n} \epsilon_n^{2k-1} |v_n^{(k)} \nabla \tilde{d}_M \cdots \nabla \tilde{d}_M / \epsilon^k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\epsilon^i} v_n^{(i)} P_i|^2 dx \right\} \end{aligned}$$

其中 P_i 为 \tilde{d}_M 之不高于 k 阶的某些导数之乘积项的和。

我们现在作如下变量代换： $x := F(y, t)$ ，其中 $F : M \times (-\delta_0/2, \delta_0/2) \rightarrow U_{\delta_0/2}$ 是一个微分同胚， $F(y, t) := y + t\nu(y)$ ， $\nu(y)$ 为 M 在 y 处对于 \tilde{E} 的外法向。我们将 $F(y, t)$ 的 Jacobi 行列式记作 $J(y, t)$ 。

于是我们有

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\epsilon_n}(u_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_M \int_{-\delta_n}^{\delta_n} \left(\frac{W(v_n(t/\epsilon_n))}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} \frac{|v_n^{(k)}(t/\epsilon_n)|^2}{\epsilon_n^{2k}} \right) J(y, t) dt d\mathcal{H}^{N-1} \right\} \\ &\quad + C \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta_n}^{\delta_n} \epsilon_n^{2k-1} \sum_{\substack{i+j < 2k \\ 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} |v_n^{(i)}(t/\epsilon_n)| |v_n^{(j)}(t/\epsilon_n)| \frac{1}{\epsilon_n^{i+j}} dt d\mathcal{H}^{N-1}(y) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} I_1^{(n)} + \limsup_{n \rightarrow \infty} I_2^{(n)} \end{aligned}$$

这里用到了距离函数的梯度模为 1，而其高阶导数因 M 紧而有界。下面我们分别估计 $I_1^{(n)}$ 和 $I_2^{(n)}$ 。

$$\begin{aligned} I_1^{(n)}(u) &= \int_M \int_{-\delta_n}^{\delta_n} \left(\frac{W(v_n(t/\epsilon_n))}{\epsilon_n} + \frac{|v_n^{(k)}(t/\epsilon_n)|^2}{\epsilon_n} \right) J(y, t) dt d\mathcal{H}^{N-1}(y) \\ &= \int_M \int_{-\delta_n/\epsilon_n}^{\delta_n/\epsilon_n} \left(W(v_n(s)) + |v_n^{(k)}(s)|^2 \right) J(y, s\epsilon_n) ds d\mathcal{H}^{N-1}(y) \\ &\leq \left(\sup_{y \in M, t \in (-\delta_n, \delta_n)} J(y, t) \right) \int_M \int_{\mathbb{R}} \left(W(v_n(s)) + |v_n^{(k)}(s)|^2 \right) ds d\mathcal{H}^{N-1}(y) \end{aligned}$$

注意到由于 M 紧，我们有 $J(y, t)$ 当 $t \rightarrow 0$ 时一致收敛到 1，于是容易得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_1^{(n)} \leq m \operatorname{Per}_{\Omega}(E)$$

下面证明 $I_2^{(n)} \rightarrow 0$ 。

我们只需证 $I_2^{(n)}$ 中的每一项

$$\int_{-\delta_n}^{\delta_n} \epsilon_n^{2k-1-i-j} |v_n^{(i)}(t/\epsilon_n)| |v_n^{(j)}(t/\epsilon_n)| dt$$

随着 n 趋向于无穷收敛到 0 即可。

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \int_{\mathbb{R}} \epsilon_n^{2k-i-j} |v_n^{(i)}(s)| |v_n^{(j)}(s)| dt \\ &\leq \epsilon_n^{2k-i-j} \|v_n^{(i)}(s)\|_{L^2} \|v_n^{(j)}(s)\|_{L^2} \end{aligned}$$

现在令 $w_n(t) := v_n(t/\epsilon_n) \in W^{k,2}(-\delta_n, \delta_n)$ ，则

$$\begin{aligned} &\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\epsilon_n} W(w_n) + \epsilon_n^{2k-1} |w_n^{(k)}|^2 \right) dt \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta_n}^{\delta_n} \left(\frac{1}{\epsilon_n} W(w_n) + \epsilon_n^{2k-1} |w_n^{(k)}|^2 \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(W(v_n) + |v_n^{(k)}|^2 \right) dt = m \end{aligned}$$

这里我们应用前面提到的 Nirenberg 的结果 (定理 3.1.3)，得到：

$$\begin{aligned} \|w_n^{(i)}\|_{L^p(-1,1)} &\leq C \|w_n^{(k)}\|_{L^2}^{i/k} \cdot \|w_n\|_{L^1}^{1-i/k} \\ &\leq C \epsilon_n^{-\frac{2k-1}{2k}i} \cdot \epsilon_n^{1-\frac{i}{k}} \end{aligned}$$

其中 $p = \frac{2k}{2k-i}$ 。又，我们有 $\|w_n^{(k)}\|_{L^p} \leq C \epsilon_n^{-\frac{2k-1}{2}} \cdot o(1)$ ，使用 Sobolev 嵌入 $W^{1,p}(-1, 1) \hookrightarrow C^0(-1, 1)$ ，我们得到

$$\|w_n^{(i)}\|_{L^2(-1,1)} < C \epsilon_n^{-\frac{2k-1}{2}} \cdot o(1)$$

从而

$$\begin{aligned} &\epsilon_n^{k-i} \left(\int_{\mathbb{R}} |v_n^{(i)}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \epsilon_n^{k-i} \epsilon_n^{i-1/2} \left(\int_{-\delta_n}^{\delta_n} |w_n^{(i)}|^2 \right)^{1/2} \\ &= o(1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

从而 E 光滑的情形得证。

下面证明 E 不是光滑的情形。由预备知识中的定理 2.2.8，存在一列光滑集 $E_i = \tilde{E}_i \cap \Omega$ ，其中 \tilde{E}_i 为 \mathbb{R}^N 中的光滑有界集，满足

$$\chi_{E_i} \rightarrow \chi_E \text{ in } L^1(\Omega), \quad |D\chi_{E_i}|(\Omega) \rightarrow |D\chi_E|(\Omega)$$

我们对于每一个 E_i 依照光滑情形来构造一组 u_i^n ，然后用一个对角线方法即可。

证毕 \square

接下来我们进行定理的证明。

证明 我们先来证明 $N = 2$ 的情形。在 [3] 中有如下结果：

引理 3.3.7 设 $u(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{S_i}(x)$ ， $S_i \subset \Omega$ 两两不相交，周长有限，且 $|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^k S_i| = 0$ 。则存在 Ω 的剖分列 $\{S_1^n, \dots, S_k^n\}$ ，满足：

(i) S_i^n 为多边形区域，且 $\mathcal{H}^{N-1}(\partial S_i^n \cap \partial \Omega) = 0$ 对任意 $i = 1, \dots, k$ 成立。

(ii) 令 $u_n(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{S_i^n}(x)$ ，则 $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega)$ 。

(iii) $\int_{\Omega} u_n(x) dx = \int_{\Omega} u(x) dx = m$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

(iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bigvee_{i=1}^k \int_{\Omega} |D(\varphi_i \circ u_n)| = \bigvee_{i=1}^k \int_{\Omega} |D(\varphi_i \circ u)|$

由此我们容易看到可以构造 Ω 的一族剖分 $\{E_1^n, \dots, E_k^n\}$ ，满足

(i') 任意的 $1 \leq i < j \leq k$ ， $L_{ij} := \partial E_i^n \cap \partial E_j^n$ 是光滑曲线段。且 L_{ij} 的两端均为直线段。

和上述引理中的条件 (ii)，(iii)，(iv)。

容易看到，如果我们对满足条件 (i') 的 $\{E_1, \dots, E_n\}$ 证明了定理，则通过上述引理中集合族的逼近和对角线论证即可证明一般情况下的定理。下面我们仅对满足 (i') 的情况进行证明。

设 $x \in \Omega$ 为两段不同的 L_{ij} 的交点，并设会聚于该点的曲线段集合为 $\{L_{i_1 j_1}, \dots, L_{i_m j_m}\}$ 。令

$$U_{\delta}^l = \{y : \text{dist}(y, L_{i_l j_l}) < \delta\}$$

其中 dist 为无符号距离。并设

$$d_{\delta} := \min \left\{ \text{dist}(y, x) : y \notin \bigcup_{l=1}^m U_{\delta}^l \right\}$$

容易看到存在 δ_0 足够小，使得可构造 x 的光滑邻域 M_{δ_0} ，满足：

1. $\text{dist}(x, \partial M_{\delta_0}) > 2d_{\delta_0}$ 。

2. $\partial M_{\delta_0} \cap U_{\delta_0}^l$ 对任意的 l 为直线段。

注意到上面类型的 x 的总数是有限的，我们可以取到一个一致的 δ_0 满足上述要求。

对于任意的 $\delta \in \mathbb{R}^+$ ，我们通过如下的尺度变换来定义

$$M_{\delta} : M_{\delta} = \frac{\delta}{\delta_0} (M_{\delta_0} - x) + x$$

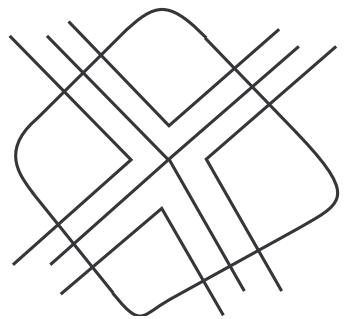


图 3.1: M_{δ} 的示意图

我们看到，在每个交点处挖去一个上述邻域后，在余下的区域里可以依照 $r = 2$ 的情况进行分别的构造和证明。从而我们只要证明当把 u_n 延拓到每个 M_{δ_n} 后，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_{\delta_n}} \left(\frac{W(u_n)}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} |D^k u_n|^2 \right) dx = 0$$

接下来我们对 u_n 进行延拓。

任取某个 M_{δ_n} ，由于在其它地方 u_n 已经依照上节的方法构造完毕，于是我们需要在如下条件下构造 $u_n \in W^{k,2}(M_{\delta_n})$ ：

$$u_n|_{\partial M_{\delta_n}} \in W^{k,2}(\partial M_{\delta_n}) \text{ 为已知, } \frac{\partial^l u_n}{\partial \nu^l} = 0$$

其中 $l = 1, \dots, k-1$ ， ν 为 M_{δ_n} 的外法向。且 $\|u_n\|_{L^\infty}$ 对 n 一致有界。

由 M_δ 的构造方法，我们可以在 M_1 上解上述问题，再尺度变换到 M_{δ_n} 上。下面我们在 M_1 上进行构造。记 $\tilde{v}_n : \partial M_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为经过尺度变换后在 ∂M_1 上的已知边值。

由于 M_1 是光滑开集，故存在 $R > 0$ ，使得 $B_{x,2R} \subset\subset M_1$ 。定义集合 $U := \bar{M}_1 \setminus (B_{x,R} \cup L)$ ， $V := [0, 1] \times [0, 1]$ 。其中 L 是连接 $\partial B_{x,R}$ 和 ∂M_1 的一条直线段。容易知道存在一一映射 $\varphi : U \cup L \rightarrow V$ ，满足 $\varphi \in C^\infty$ ， $\varphi^{-1} \in C^\infty$ 。将 $\partial B_{x,R}$ ， ∂M_1 分别映到 $[0, 1] \times \{0\}$ 和 $[0, 1] \times \{1\}$ ，且使得 φ 和 φ^{-1} 的各阶导数都是有界的。

定义 $f(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 $f(x) := \tilde{v} \circ \varphi^{-1}(x, 1)$ 。注意 f 可以延拓为 \mathbb{R} 上以 1 为周期的周期函数，且 $f \in W^{k,2}[0, 1]$ 。

下面我们取 $g(y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数，满足

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1$$

$$g^{(l)}(0) = g^{(l)}(1) = 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

显然这样的函数是存在的。

现在我们如下构造 $\tilde{u} : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ ：

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} (g \cdot f) \circ \varphi(x) & x \in M_1 \setminus B_{x,R} \\ \text{依连续性延拓} & x \in L \\ 0 & x \in B_{x,R} \end{cases}$$

我们容易看到

$$\|\tilde{u}_n\|_{L^\infty(M_1)} \leq \|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(\partial M_1)}$$

$$\|\tilde{u}_n\|_{W^{k,2}(M_1)} \leq C(\varphi, g) \|\tilde{v}_n\|_{W^{k,2}(\partial M_1)}$$

即如此延拓所得到的 \tilde{u}_n 满足我们的要求。

于是通过尺度变换，我们有：

$$\begin{aligned} & \int_{M_{\delta_n}} \left(\frac{W(u_n)}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} |D^k u_n|^2 \right) dx \\ &= \int_{M_1} \left(\frac{W(\tilde{u}_n)}{\epsilon_n} + \epsilon_n^{2k-1} |D^k \tilde{u}_n|^2 \frac{1}{\delta_n^{2k}} \right) \cdot \delta_n^2 dx \\ &= \int_{M_1} \left(\frac{\delta_n^2}{\epsilon_n} W(\tilde{u}_n) + \frac{\epsilon_n^{2k-1}}{\delta_n^{2k-2}} |D^k \tilde{u}_n|^2 \right) dx \end{aligned}$$

于是，只需取 $\delta_n = o(\epsilon_n^{1/2})$ ，即可得到第一项极限为 0。

下面估计第二项。

$$\begin{aligned} & \int_{M_1} |D^k \tilde{u}_n|^2 dx \\ &\leq C \int_{\partial M_1} |\tilde{v}_n^{(k)}|^2 ds \\ &= C \sum_l \int_{\partial M_1 \cap U_1^l} |\tilde{v}_n^{(k)}|^2 ds \\ &\leq C \sum_l \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta_n^{2k}}{\epsilon_n^{2k}} |v_{ij}^{n(k)}|^2 \frac{\epsilon_n}{\delta_n} ds' \\ &\leq C \frac{\delta_n^{2k-1}}{\epsilon_n^{2k-1}} \end{aligned}$$

其中 v_{ij}^n 是上面 $r = 2$ 情况中的 v^n ，只是用 a_i, a_j 代替 a, b 。

由此容易看到第二项也是趋向于 0 的。定理得证。

注意到在 [3] 中，这里的引理 3.3.7 是对任意的 $\Omega \in \mathbb{R}^N$ 成立的，故对 $N \geq 3$ 的情况可以类似证明。

证毕 □

§3.4 附注

在扰动项为 $\epsilon^2 \int_{\Omega} |Du|^2$ 的文献中，界面的“单位能量” m 均写作 $2 \min \int_{a_i}^{a_j} W^{1/2}(s) ds$ ，其中的极小是在所有连接 a_i 与 a_j 的 C^1 曲线上求。容易证明这个常数与本文中的常数是一致的。

第二部分

带表面能的微结构

第四章 引言

在某些晶体的相变现象中，经常出现几种有对称性联系的状态在微小尺度下互相交织，形成有序之细微振动的结构，一般称之为“微结构”（见 [67], [10] 中的附图）。从物理上看，这是因为某些形变（能量阱）在能量上的代价很低，而物体在整体上又没有变形（所谓 Self-accommodation，见 [6]），导致其实际形变必须是许多取值为几个阱之一的局部形变的组合。从数学上理解这种现象，特别是定量地理解之，对于许多新技术（比如记忆合金）的发展将会起到巨大的推动作用。为了对这种现象建立一个数学模型，几十年来人们作了很多努力。主要的模型有六，七十年代发展的几何线性模型（[28], [35], [50], [51], [58], [83], [84]）和 80 年代末发展的几何非线性模型（[10], [11], [29], [30], [31], [48]）。这些模型成功地在数学上解释了微结构的一些性质。特别是诸如层状微结构的方向这样的定性性质。

这些模型提出后，许多人开始研究如何有效地对其进行计算，以及这些计算方法的收敛性理论。[52], [53], [91], [92] 针对几何线性模型进行了一些计算。而对于几何非线性模型，有大量的计算实例和理论分析。（见 [12], [13], [14], [17], [18], [19], [21], [22], [23], [39], [60], [61], [62], [63], [66], [67], [68], [69], [71], [73], [79], [85], [93], [94]）这些文章建立了几何非线性模型数值计算的收敛性理论，并提出了很多针对微结构数值计算的新的算法和计算技巧。

上述模型利用 Young 测度的概念来在数学上表示细微结构，也就是说，用无限细微的振动来模拟物理上有限细微的振动。在实际中，微结构并不是真正无限细微的，而是有一定宽度，即所谓尺度的。同时微结构也并不是只有振动方向这一个性质，在奥氏体和马氏体的交界面附近会有针状结构和分叉现象出现。原有的模型并不能解释这些现象。近年来，人们从计算和理论上对这些现象进行了一些探索。

在计算方面，Bo Li & Luskin[69] 和 Zhiping Li [64], [65] 对交界面处的针状结构进行了一些数值模拟。对这方面的数值计算取得了一些经验。

在理论上，有一种看法认为尺度来源于所谓表面能量，即微结构各态的交界面上所包含的能量。于是人们将几何非线性模型的能量泛函加上一个表面能量项。成为新的微结构模型。R.V.Kohn 与 S.Müller 在 [56] 和 [57] 这两篇文章中考察了一个简化的模型，从理论上证明了对于这个模型，其最小能量比通常作无分叉假设后所导出的要小。他们还构造了一个有自相似分叉的形变函数，其能量与理论极小值极为接近。他们由此猜测实际的极小解也是自相似的。另一个重要结果来自于 Georg Dolzmann 和 Stefan Müller 的工作 [27]。他们使用另一个不同的表面能量项，证明了在一定条件下，不会有无限细微的结构，即微结构的尺度是有限的。本文中的带表面能的模型，其主要思想即来自于上述文章和第一部分中的 Γ - 极限结果。

对于交界面上的介观尺度 (mesoscale) 结构 (如针状，分叉) 的形成原因，还有

另外的一些理论上的解释。在这些方面也有很多的工作。比如 [54], [55], [86] 和 [89] 从晶体相变的动态模型出发, 进行分析和计算。再如 [2] 将这些现象的出现归因于物质形变达到了能量的局部极小。又如在 [69] 中, 作者将离开交界面一定距离的层状结构固定, 而在计算中产生了微结构。这实际上也是一种动态的观点。本文的计算也借鉴了这种方法。

第五章 数学模型

本章中，我们将首先介绍一下几何非线性模型及晶体表面能量的数学理论，然后给出本文的计算将使用的数学模型。

§5.1 几何非线性模型

考虑一块晶体，在空间中占据一块区域 $\{u(x) : x \in \Omega\}$ ，其中 u 是从所谓“参考构型” $\Omega \in \mathbb{R}^3$ 到 \mathbb{R}^3 的一个映射。经典的弹性理论 ([15], [5]) 要求形变函数 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是如下问题的解：

$$\min \int_{\Omega} W(\nabla u, \theta) dx$$

其中 θ 表示温度。

这样的 u 的存在性要求 W 是所谓“拟凸”的（见第二章，及其参考文献）。而对于我们希望处理的微结构问题来说，由于 $W^{1,p}$ 函数的光滑性，这样的 u 不能表现出与 Ω 不在同一尺度的细微振动性质，是不符合条件的。于是合适的的微结构数学模型就要求 W 不满足拟凸条件 ([10], [11], [67])。

我们考虑如下的能量泛函：

$$I(u) = \int_{\Omega} W(\nabla u, \theta) dx$$

及其极小化问题：

$$\min I(u), \quad u \in \mathcal{A}$$

其中

$$\mathcal{A} := \{u \in W^{1,p}(\Omega), \det \nabla u > 0, u(x)|_{\partial\Omega} = u_0(x)\}$$

实验表明，存在一个临界温度 θ_0 ，当温度高于它时，晶体处于单一的高对称性稳定态，称为奥氏体；而当温度低于 θ_0 时，晶体的稳定态变为几个，对称性降低，我们称之为马氏体。从实验我们可以得出 W 应满足如下几个条件：

标架无关性：

我们要求 W 在标架的伽利略变换下是不变的。即

$$W(RF, \theta) = W(F, \theta), \quad \forall R \in SO(3) \text{ 和 } F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

其中 $SO(3)$ 表示行列式为 1 的正交矩阵（旋转）。

对称性：

我们假设能量密度 W 继承了晶体的最高对称性，即奥氏体晶格点阵的对称群。（参考关于晶体群的书籍，如 [42]。）从而应有：

$$W(R_i F R_i^T, \theta) = W(F, \theta), \quad \forall R_i \in \mathcal{G}$$

其中 $\mathcal{G} = \{R_1, \dots, R_L\}$ 是奥氏体的对称群。

我们记奥氏体相应的形变张量为： $\nabla u = U_0$ ，其中 U_0 满足 $R_i U_0 R_i^T = U_0$ ， $W(U_0, \theta_1) = 0$ 。于是 $\{R_i\}$ 就是奥氏体晶格点阵的对称群。而当温度下降到低于 θ_0 时，马氏体出现，晶格对称性减弱。设马氏体的一个形变梯度为 $\nabla u = U_1$ ，令 $\{U_1, \dots, U_M\} = \{R_i U_1 R_i^T\}$ 。则根据刚才的对称性性质， $\{U_1, \dots, U_M\}$ 代表了马氏体的 M 个稳定态，并且有

$$W(F, \theta) = 0, \quad \forall F \in \mathcal{U}$$

其中 $\mathcal{U} = SO(3)U_1 \cup \dots \cup SO(3)U_M$ 。

下面我们叙述几何非线性理论的一些主要结果。

命题 5.1.1 ([10]) 设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 为一个连通开集，设 $y \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ 满足

$$Dy(x) = A, \quad a.e.x \in \Omega_A$$

$$Dy(x) = B, \quad a.e.x \in \Omega_B$$

其中 $A, B \in M^{m \times n}$ ， Ω_A, Ω_B 可测，有正测度，且满足 $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ 。则存在 $c \in \mathbb{R}^m, n \in \mathbb{R}^n, |n| = 1$ ，使得

$$A - B = c \otimes n$$

且有

$$y(x) = y_0 + Bx + \theta(x)c, \quad x \in \Omega$$

其中 $y_0 \in R^m, y_0 \cdot c = 0, \theta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ 满足 $D\theta(x) = \chi_A(x)n, a.e.$ ， χ_A 为 A 的特征函数。

定义 5.1.2 我们称 $F_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 和 $F_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 有秩一连接，如果存在 $a \in \mathbb{R}^3$ 和 $n \in \mathbb{R}^3, |n| = 1$ ，使得

$$F_1 = F_0 + a \otimes n$$

可以证明，当边值与 U_i 均无秩一连接，而与 U_i 的某个凸组合有秩一连接时，能量泛函的极小值不可能在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中达到，其极小化序列收敛到一个形式为 $\sum_{i=1}^M \alpha_i \delta_{O_i U_i}$ 的 Young 测度，其中 $\alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$ ， O_i 为旋转矩阵，而 δ_F 为集中在 F 上的点测度。该 Young 测度就代表了问题对应的微结构。这个微结构的方向由秩一连接确定，而其中每个态所占的体积（在构型空间中）与 α_i 成正比。

§5.2 表面能量

当 $W(u) = 0$, $a.e.x \in \Omega$ 时, 表面能量经常如下表示 ([67]):

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \text{area } S_i$$

其中 i 遍历所有不同相间的交界面, $\alpha_i > 0$ 是交界面 i 的表面能量密度, S_i 是该交界面的面积。另一方面, 在理论研究和实际计算中, 往往不能要求 $W(u) = 0$ $a.e.x \in \Omega$, 由此又有另一种表面能的刻画 ([67]):

$$\hat{S}(u) = \epsilon^2 \int_{\Omega} \nabla \nabla u A \nabla \nabla u \, dx$$

其中 A 是一个六阶张量, 满足晶体的标架无关性和对称性。见 [9], [46]。此时需要极小化的总能量变为:

$$I(u) = \int_{\Omega} (W(Du, \theta) + \epsilon^2 \nabla \nabla u A \nabla \nabla u) \, dx$$

§5.3 本文的计算模型

§5.3.1 模型的提出

我们考虑一个简化的带表面能微结构模型:

$$I_{\epsilon}(u) = \int_{\Omega} (W(Du) + \epsilon^2 |D^2 u|^2) \, dx$$

在实际中, 两相之间过渡层的宽度比微结构的尺度要小很多, 而且我们也并不关心过渡层的具体结构, 因此我们希望在计算中能够忽略过渡层的具体信息, 而仅将它看作是落在不同阱中的区域的交界面(线), 这样就可以用线性元来求解, 省去很多不必要的麻烦。这就需要一个新的所谓 “sharp” 模型, 其能量描述不依赖于过渡层的具体信息, 而只依赖于简化成区域边界后的过渡层两侧的信息。也就是说, 我们需要将 $D^2 u$ 的平方项去掉, 换成 Du 在交界面上的变差。在第一部分中, 我们看到上述泛函在 $\int Du = m$ 的条件下, 其 Γ -极限仅包含 $D^2 u$ 的一次项。(关于类似 Γ -极限的推导, 可见 [34]。) 基于这个思想我们引入如下的一族泛函:

$$\tilde{I}_{\epsilon}(u) = \int_{\Omega} W(Du) + \tilde{\epsilon} |D^2 u| \, dx$$

我们容易知道这两个泛函在条件 $\int Du = m$ 下的 Γ -极限是一样的。而后一个显然更适合于有限元求解。在我们的计算中, 我们将使用这后一个泛函。

注 5.3.1 在我们的问题中, 对容许泛函的限制条件并不是 $\int Du = m$, 而是 $u|_{\Gamma} = u_0$ 。容易看出在这个条件下是不能使用第一部分的结果的。我们的模型实际上是基

于如下假设提出的：

由于条件 $u|_{\Gamma} = u_0$ 的限制，容易看到

$$\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-1} I_{\epsilon}(u) = +\infty$$

其中 $\{u_n\}$ 是泛函 $I_{\epsilon}(u)$ 的极小点。现在我们假设存在 $0 < \alpha < 1$ ，使得

$$\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-\alpha} I_{\epsilon}(u) < +\infty$$

令

$$\alpha_0 = \max \left\{ 0 < \alpha < 1 : \alpha \text{ 满足上式} \right\}$$

并假设此时有

$$\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-\alpha_0} I_{\epsilon}(u) = M \int_{\Omega} |Du| < +\infty$$

其中 M 是一个大于 0 的常数（类似于第一部分中的 m ）。

下面我们令

$$\tilde{\epsilon} = M \epsilon_0^{\alpha}$$

，这时 $\tilde{I}_{\epsilon}(u)$ 就是一个合适的 “sharp” 能量泛函。并且可以看到，当 $\tilde{\epsilon}$ 很小时，如果 u 是 $\tilde{I}_{\epsilon}(u)$ 的极小解，则应有 $\tilde{I}_{\epsilon}(u) \approx M' \tilde{\epsilon}$ ，其中 $M' > 0$ 是常数。

对于一些特殊的情况，[56], [57] 和 [78] 提出了类似的 “sharp” 模型，并对这两类泛函的关系进行了一些研究。

§5.3.2 带表面能泛函之极小的存在性

本节我们证明上一节中两个泛函的解的存在性。首先我们将上一节中的想法严格地表述出来。定义如下的一些集合：

$$\mathcal{A} := \{u : u \in W^{1,1}(\Omega), D^2u \in L^2(\Omega), u = u_0 \text{ on } \Gamma\}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{u : u \in W^{1,1}(\Omega), Du \in BV(\Omega), u = u_0 \text{ on } \Gamma\}$$

其中 $\Gamma \in \partial\Omega$ ，且 $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) > 0$ 。

定义如下两个泛函极小问题：

问题一： $\min I_{\epsilon}(u)$, $u \in \mathcal{A}$

问题二： $\min \tilde{I}_{\epsilon}(u)$, $u \in \tilde{\mathcal{A}}$

定理 5.3.2 上述两个问题的解存在。

证明 我们首先证明问题一的解的存在性。

设 $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ 为 I_ϵ 的极小化序列， $\liminf I_\epsilon(u_n) < +\infty$ 。由此及 W 的增长性条件，我们有 $\{Du_n\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中一致有界。注意到 u_n 在边界上的一个 $N-1$ 维正测度集上取 Dirichlet 边值，故由 Poincaré 不等式，有 u_n 在 $L^1(\Omega)$ 中一致有界。另一方面，我们又知道 $D^2 u_n$ 在 $L^2(\Omega)$ 中一致有界。因此，利用嵌入定理和 $L^2(\Omega)$ 的自反性，我们有：存在 $\{u_n\}$ 的一个子列（仍记作 $\{u_n\}$ ）在 $W^{1,1}$ 中收敛到 $u \in W^{1,1}$ ，同时有 $D^2 u_n$ 在 $L^2(\Omega)$ 中弱收敛到 $D^2 u$ 。从而我们得到 $u \in \mathcal{A}$ 。

下面我们证明 $\liminf I_\epsilon(u_n) \geq I_\epsilon(u)$ 。任取 $\delta > 0$ ，由于 $W(Du)$ 在 $L^1(\Omega)$ 上可积，故存在 $s_0 > 0$ 使得对任意满足 $|E| < s_0$ 的可侧集 E ，有

$$\left| \int_E W(Du) dx \right| < \delta$$

另一方面，由于 $Du_n \rightarrow Du$ in $L^1(\Omega)$ ，存在子列（仍记作 Du_n ）几乎处处收敛到 Du ，于是由 W 的连续性有 $W(Du_n)$ 几乎处处收敛到 $W(Du)$ 。从而由 Lusin 定理 ([72])，存在 E 可测且满足 $|E| < s_0$ ，使得 $W(Du_n)$ 在 $\Omega \setminus E$ 上一致收敛到 $W(Du)$ 。于是有

$$\liminf \int_{\Omega} W(Du_n) \geq \lim \int_{\Omega \setminus E} W(Du_n) = \int_{\Omega \setminus E} W(Du) \geq \int_{\Omega} W(Du) - \delta$$

由 δ 的任意性，我们有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} W(Du_n) dx \geq \int_{\Omega} W(Du) dx$$

另一方面，由 L^2 模的弱下半连续性，我们有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D^2 u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |D^2 u|^2 dx$$

至此问题一解的存在性得证。

对于问题二解的存在性，只要注意到利用 BV 空间的嵌入定理我们同样可以得到 u_n 在 $W^{1,1}(\Omega)$ 中收敛到 u ，并注意到 BV 半模对 L^1 收敛有弱下半连续性，就可以用与上面同样的方法证明。

证毕

□

§5.4 离散问题

§5.4.1 模型的离散化

设 $(T, P_1(T), \Phi_T)$ 为线性协调元 ([16])。其中 T 是三角形单元， $P_1(T)$ 为 T 上的线性函数空间，而 Φ_T 为节点参数集合。记 $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_k\}$ 为 Ω 的单元剖分。定义离散问题解的容许集合如下：

$$\tilde{\mathcal{A}}_h := \{u_h : u_h|_T \in P_1(T), \quad T \in \mathcal{T}_h, \quad u_h|_{\Gamma_h} = 0\}$$

其中 $\Gamma_h = \Gamma \cap \partial\Omega$ 。

定义离散能量泛函：

$$\tilde{I}_\epsilon^h := \sum_{m=1}^k \int_{K_m} W(Du_h|_{T_m}) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \tilde{\epsilon} |L_{ij}| |Du_h|_{T_i} - Du_h|_{T_j}|$$

其中 $L_{ij} := \partial T_i \cap \partial T_j$ 。

我们求解如下离散问题：

$$\min_{u_h \in \tilde{\mathcal{A}}_h} \tilde{I}_\epsilon^h$$

§5.4.2 离散问题极小解的存在性

定理 5.4.1 对任意的 $h > 0$ ，存在 $u_h \in \tilde{\mathcal{A}}_h$ ，使得

$$\tilde{I}_\epsilon^h(u_h) = \min_{u_h \in \tilde{\mathcal{A}}_h} \tilde{I}_\epsilon^h(u_h)$$

证明 设有限元空间的基函数为 φ_i , $i = 1, \dots, M_h$ 。则对任意的 $u_h \in \tilde{\mathcal{A}}_h$ 有 $u_h = \sum_{i=1}^{M_h} \alpha_i \varphi_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 。

设 $u_h^m = \sum_{i=1}^{M_h} \alpha_i^m \varphi_i$ 为 \tilde{I}_ϵ^h 的极小化序列，我们只需证存在 $C > 0$ ，使得

$$|\alpha_i^m| < C, \quad \forall i, m$$

用反证法。如果上式不成立，则存在 $i_0 \in \{1, \dots, M_h\}$ 及 $m_k \rightarrow \infty$ ，使得

$$|\alpha_{i_0}^{m_k}| \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

设节点 i_0 的坐标为 x 。则

$$|u_h^{m_k}(x)| \rightarrow \infty$$

由于 $u_h^{m_k}|_{\Gamma_h} = 0$ ，故存在一个单元 K ，使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |Du_h^{m_k}(x)|_K \rightarrow \infty$$

于是我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_K W(Du_h^{m_k}|_K) dx \rightarrow \infty$$

与假设矛盾。从而本定理得证。

证毕

□

第六章 算法及数值结果

我们将使用 [62] 和 [63] 中发展的网格变换技术，和 [65] 中的网格加密思想来求解我们的模型问题。

§6.1 网格变换方法

很多计算结果 (如 [23]) 显示，当网格的方向和微结构的内在方向一致时，在计算的网格剖分比较粗的情况下，仍然可以得到较好的结果，也有较快的收敛速度。而当网格的方向和微结构方向不一致时，就必须将网格剖分加密很多才可能得到满意的结果，为此还必须忍受缓慢的收敛速度和更大的收敛不到全局极小的可能。Zhiping Li 在 [62] 和 [63] 中提出的网格变换方法在一定程度上解决了这个问题。

网格变换方法使单元在求极小过程中可以发生线性形变，从而可以在一定程度上去主动适应微结构的方向。于是在网格方向与微结构方向不同的情况下也可以使用较粗的网格得到较好的结果。

下面我们介绍一下网格变换方法。考虑如下的极小化问题：

$$I(u; \Omega) = \int_{\Omega} W(\nabla u(x)) dx$$

其定义域为：

$$\mathbb{U}(u_0; \Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) : u(x) = u_0(x) \text{ on } \partial\Omega_0\}$$

定义

$$T(\Omega) = \left\{ L \in W^{1,\infty}(\Omega) : L^{-1} \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ 且 } \det \nabla L > 0, a.e. \text{ in } \Omega \right\}$$

对任意 $L \in T(\Omega)$ 及 $u \in \mathbb{U}(u_0; \Omega)$ ，令 $A \in \mathbb{R}^{mn}$ 并如下定义 $\tilde{u}(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ：

$$\tilde{u}(x) = u(L(x)) - AL(x)$$

由此我们容易知道 $\tilde{u} \in \mathbb{U}(\tilde{u}_0; \Omega)$ ，其中 $\tilde{u}_0(x) = u_0(L(x)) - AL(x)$ ，

$$\int_{\Omega} W(A + \nabla \tilde{u}(x)(\nabla L(x))^{-1}) \det \nabla L(x) dx = I(u; \Omega)$$

且

$$\inf_{\tilde{u} \in \mathbb{U}(\tilde{u}_0; \Omega)} W(\tilde{u}, L; \Omega) = \inf_{u \in \mathbb{U}(u_0; \Omega)} W(u; \Omega)$$

其中

$$F(\tilde{u}, L; \Omega) = \int_{\Omega} W(A + \nabla \tilde{u}(x)(\nabla L(x))^{-1}) \det \nabla L(x) dx$$

设 $\mathfrak{S}_h(\Omega)$ 为 Ω 的一个正则剖分 (见 [16]), 令

$$T_h(\Omega) = \left\{ L \in T(\Omega) : L|_K \text{ 在 } \forall K \in \mathfrak{S}_h(\Omega) \text{ 中为仿射变换} \right\}$$

$$\mathbb{U}_h = \left\{ u \in (C(\bar{\Omega}))^m : u|_K \text{ 在 } \forall K \in \mathfrak{S}_h(\Omega) \text{ 中为仿射变换} \right\}$$

$$\mathbb{U}_h(v; \Omega) = \{u \in \mathbb{U}_h : u|_{\partial\Omega_0} = v\}$$

网格变换方法求解如下的离散问题:

$$\begin{cases} \text{寻找 } (u, L) \in \mathbb{U}_h(\bar{u}_0; \Omega) \times T_h(\Omega) \text{ 使得} \\ F(u, L; \Omega) = \inf_{(u', L') \in \mathbb{U}_h(\bar{u}_0; \Omega) \times T_h(\Omega)} F(u', L'; \Omega) \end{cases}$$

收敛性的证明可以见 [62], [63]。

§6.2 数值计算模型及算法

我们采用 [69] 中的基于记忆合金 Cu-14at.% Al-3.9at.% Ni 的二维计算模型。设微结构有如下的两个“阱”:

$$U_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad U_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha = 1.0619$, $\beta = 1.0232$ 为形变应力。由 [2] 的实验结果, 我们可以假设带状微结构仅由这两个阱构成。于是我们有, 存在旋转矩阵 Q , 使得

$$QU_1 - U_2 = a \otimes n$$

而在均一态的部分我们将假设其为 $\lambda QU_1 + (1 - \lambda)U_2$, 并在未作说明时令 $\lambda = 0.5$ 。

对一个给定的体积比 λ , 我们由前述关系式及如下关系

$$R_\lambda U_2 - [\lambda QU_1 + (1 - \lambda)U_2] = b_\lambda \otimes m_\lambda$$

解得

$$Q = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta & \xi \end{pmatrix}, \quad a = \sqrt{2}\eta \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad n = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\lambda = I + (\lambda a \otimes n + b_\lambda \otimes m_\lambda) U_2^{-1}, b_\lambda = -\frac{\lambda\eta\sqrt{2(1+\theta^2)}}{\xi^2 + \lambda^2\eta^2} \begin{pmatrix} \beta(1 + (1 + \lambda)\eta) \\ \alpha(1 - (1 + \lambda)\eta) \end{pmatrix}$$

$$m_\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2(1+\theta^2)}} \begin{pmatrix} \theta - 1 \\ \theta + 1 \end{pmatrix}$$

其中 $\xi = 2\alpha\beta/(\alpha^2 + \beta^2)$, $\eta = (\alpha^2 - \beta^2)/(\alpha^2 + \beta^2)$, $\theta = (1 - \lambda)\eta$ 。

我们采用所谓的“几何非线性模型”，将形变函数看作如下泛函的极小化解：

$$I(u) = \int_{\Omega} W(Du(x)) + \tilde{\epsilon}|D^2u(x)|$$

其中 $W(F)$ 是所谓的弹性能量密度。我们使用 [69] 中的 $W(F)$:

$$W(F) = \begin{cases} W_0(C_{11}, C_{22}, C_{12}) & \text{若 } C_{11} \geq C_{22} \\ W_0(C_{22}, C_{11}, C_{12}) & \text{若 } C_{11} < C_{22} \end{cases}$$

其中

$$W_0(C_{11}, C_{22}, C_{12}) = \frac{\sigma_1}{2}(C_{11} - \alpha^2)^2 + \frac{\sigma_2}{2}(C_{22} - \beta^2)^2 + \frac{\sigma_3}{2}(C_{11} + C_{22} - \alpha^2 - \beta^2) + \frac{\sigma_4}{2}C_{12}^2$$

其中 $C = (C_{ij}) = F^T F$ 是 Cauchy-Green 应力张量，而四个参数为 $\sigma_1 = 27.5$, $\sigma_2 = 37.2$, $\sigma_3 = -11.8$, $\sigma_4 = 16.7$ 。

我们将初始得计算区域取为平行四边形，其边分别垂直于 n 和 m_λ ，边长分别为 L_1 , L_2 。

§6.3 数值算法和可视化

§6.3.1 数值算法

§6.3.1.1 基本算法

我们在计算区域上采用“米”字形的三角剖分，并使用线性协调有限元。我们使用 [97] 中的 Polak-Ribiere-Polyak 再开始共轭梯度法来求解离散后的极小问题。

注意到在交界面处应该出现的针状或分叉结构中，不同相区域的边界显然是与秩一连接所决定的方向不同的。因此，在计算中，我们使用 [62] 中的网格变换方法来减小网格剖分的规模，从而减小运算量，同时改善收敛性。

§6.3.1.2 算法的改进和加速

由于我们需要寻求交界面附近细微的针状或分叉结构，我们的网格需要非常细密，特别在 L_2 方向更是如此，这样才能捕捉到微结构的“尺度”。然而，经验表明，网格越细极小的求解时间就越长，最终结果落入局部极小的可能性也就越大（也有理论将针状和分叉的成因归于形变落入局部极小，可参见 [2]）。因此我们需要减小求解问题的规模。我们采用如下的方法来实现前面的目的。

周期边值

我们将剖分的网格数固定。于是，为了寻求微结构的尺度，我们必须变化 L_2 ，并将不同大小区域的计算结果进行比较。而如果我们在计算中使用固定边值，则对

不同的 L_2 的计算实际上是在不同的边值条件下进行的，从而这样的比较是没有意义的。因此我们采用周期边值，并以能量/ L_2 作为互相比较的依据。并且，在计算过程中我们保证每一步解的周期性。

网格加密

在实际的计算中我们发现，在网格数稀少的情况下，网格变换方法可以发挥很大的作用，而当网格的数目不断增多时，网格变换对结果的改进不断减小。这种现象产生的原因是由于梯度型求极小算法本质上是局部的。因此我们希望在周期边值的基础上进一步减小网格的规模，从而加快收敛的速度。我们使用如下的网格加密算法：

1. 取初始剖分 $N_1 \times N_2$ ，进行计算。
2. 当计算进行到一定程度时，将网格加密到 $4N_1 \times 4N_2$ 。
3. 继续进行计算。

注意到 2. 开始时，网格已经经过了变形，不是规则的剖分了。这时的加密有两种选择：

- 甲. 在已变形的网格上加密。
- 乙. 对原区域进行重新剖分加密，并在新网格上作线性插值。

在实践中我们发现 ([65])，由于一般在 1. 中网格会发生较大的变形（特别是在我们关心的 ϵ 很小的情况下更是如此），有些单元的形状变得非常细长，这时采用加密方法甲的效果远远不如采用方法乙的效果。而且似乎方法乙更有利于分叉的出现。因此我们在计算中采用方法乙。

§6.3.2 可视化

我们采用一般的可视化方法，即：

对每一个单元，计算一个属于 $[0, 1]$ 的值：

$$\frac{\|F^T F - U_1^T U_1\|}{\|F^T F - U_1^T U_1\| + \|F^T F - U_2^T U_2\|}$$

将 $[0, 1]$ 等分，每一份对应一个灰度值，以此灰度值对该单元进行填充。在本文的实际作图中，我们总共使用 8 个灰度值。

注 6.3.1 在可视化时要注意人眼对灰度值的感觉并不是线性的，而是指数性的。即设 n 个灰度值为 $(R, G, B) : (s_1, s_1, s_1), \dots, (s_n, s_n, s_n)$ ，则各灰度应满足如下关系：

$$\frac{s_1}{s_2} = \dots = \frac{s_{n-1}}{s_n}$$

见 [45]。

§6.4 数值例子

本节中，我们给出依照上面算法进行计算和可视化所得的数值结果。我们在上节所述的边长为 $L_1 \times L_2$ 的区域上进行计算。我们将与均一态相邻边上的初值取为 $U := \lambda Q U_1 + (1 - \lambda) U_2$ ，而在另一端将初值取为周期的层状结构，每一层宽度为两个网格，其上分别以 $r(Q U_1 - U) + U$ 和 $r(U_2 - U) + U$ 为边值，其中 $0 < r$ 是一个实数。在两边之间的网格点上我们用线性插值予以赋值，作为对微结构形成的一个导向。以下例子中，若未经说明，我们一律取 $r = 0.01$ 及 $\lambda = 0.5$ 。

在计算的过程中，我们固定与均一态（奥氏体）相邻处的 x, y 及 u, v 的值，而在另一端，我们仅固定 x, y 的值。

§6.4.1 加表面能后针状和分叉微结构的形成

我们同过取不同的 L_2 和 ϵ 来观察这些现象的出现。图 6.1, 图 6.2 和图 6.3 是不同 ϵ 和 L_2 下的计算结果。

§6.4.2 针状微结构的尺度和能量

我们通过对具有不同 L_2 的周期区域进行求解，并比较各情况下的极小来确定对应于某个 ϵ 的最佳尺度。在实际计算中，我们对 L_2 用黄金分割法进行一维搜索 ([97])。

得到结果如下：

1. $L_1 = 1.0$:

$\tilde{\epsilon}$	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
L_2	0.113276	0.218034	0.313778	0.555941	0.794845
能量	0.000045	0.000055	0.000106	0.000422	0.000909

2. $L1 = 4.0 :$

$\tilde{\epsilon}$	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
$L2$	0.282777	0.397049	1.064933	2.276971
能量	0.000421	0.000632	0.001243	0.002502

依照我们在注 5.3.1 中的假设,

$$\tilde{\epsilon} = M\epsilon^{\alpha_0}$$

当 ϵ 很小时应有其对应的能量为 $E \approx M'\epsilon^{\alpha_0}$, 即 $\frac{E}{\tilde{\epsilon}} \approx \frac{M'}{M}$ 为常数。

而我们现在的结果却是

1.L1 = 1.0 :

$\tilde{\epsilon}$	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
能量 / $\tilde{\epsilon}$	4.5×10^4	5.5×10^3	1.06×10^3	4.22×10^3	9.09×10^3

2.L1 = 4.0 :

$\tilde{\epsilon}$	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
能量 / $\tilde{\epsilon}$	4.21×10^4	6.32×10^3	1.243×10^3	2.502×10^2

从上面可以看出, 能量与 $\tilde{\epsilon}$ 之比随着后者的减小而增大。这说明我们在注 5.3.1 中的假设很可能是不正确的。这种现象的出现可能是由于如下几个原因:

1. 由于求极小算法的限制和网格离散的限制, 我们没有求解到真正的能量极小。
2. 我们的 "sharp" 模型并不是原来泛函的 Γ - 极限。也就是说, 真正极小解的 "sharp" 对应很可能有类似于 [56] 和 [57] 中所描述的自相似结构, 这种结构的交界面面积不应该用一维的 Hausdorff 测度来描述。因此我们现在模型中的表面能量项比实际的要大。从而导致了能量相对于 $\tilde{\epsilon}$ 的偏大。
3. 我们知道, 当 $\tilde{\epsilon}$ 减小时, 泛函的凸性降低, 对极小的求解也会有一定影响。

从我们的结果来看, $\tilde{\epsilon}$ 越小, 其与能量的比值与我们预计值的差别就越大, 甚至比值的变化已经有了量级上的差异。注意到我们对于不同 $\tilde{\epsilon}$ 和不同区域的求解都是在同样的网格上进行的, 因此求极小算法的效果即使各不相同, 也不应有如此大的差异。所以我们认为原因 2 的可能性比较大。至于原因 3 的影响到底有多大, 似乎难以定量表述。这方面还需要作进一步的研究。

§6.4.3 计算结果图示

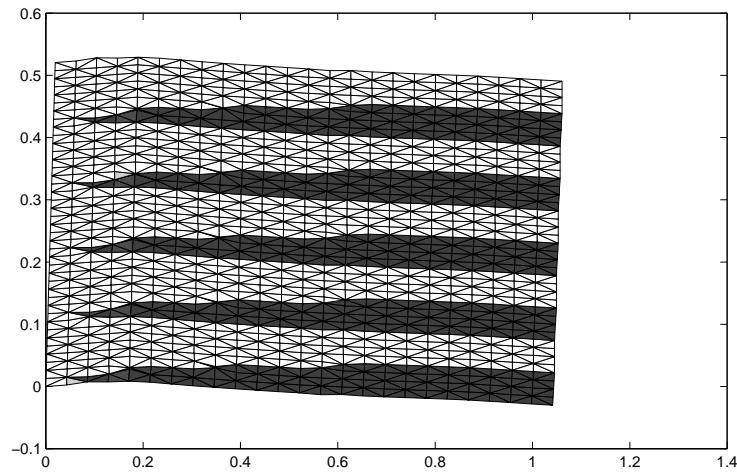


图 6.1: $L1 = 1.0, L2 = 0.5, \epsilon = 10^{-8}$, 针状结构

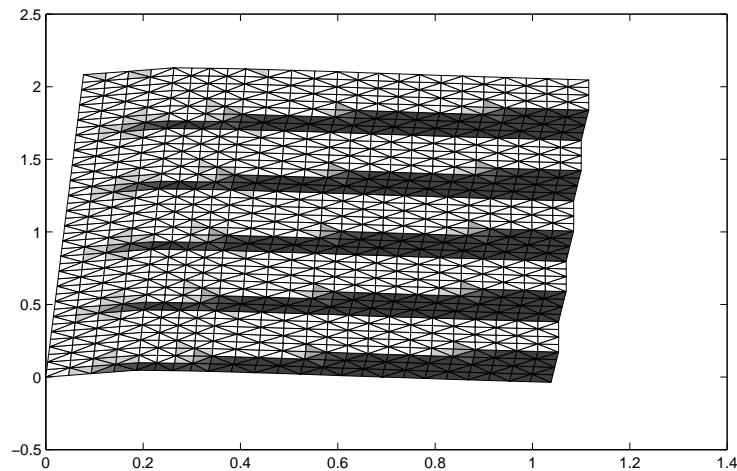
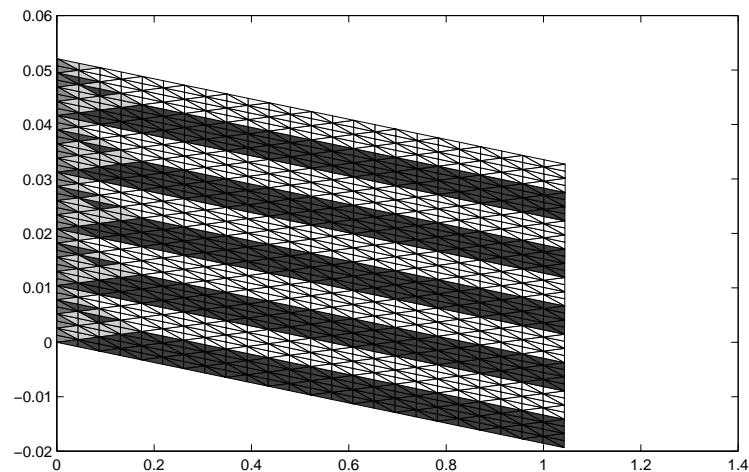
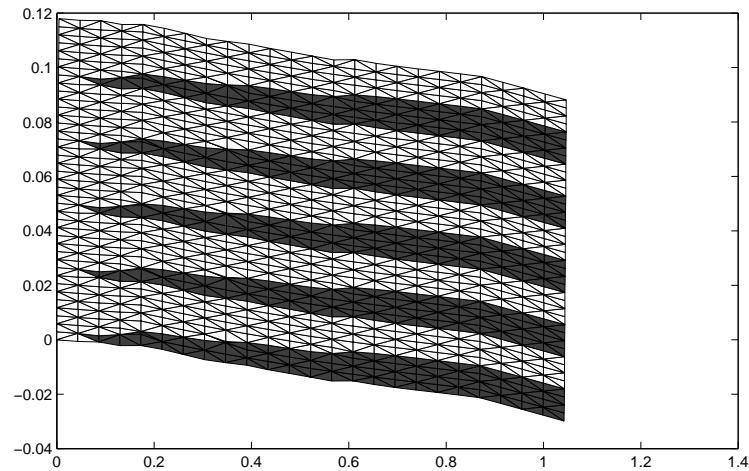
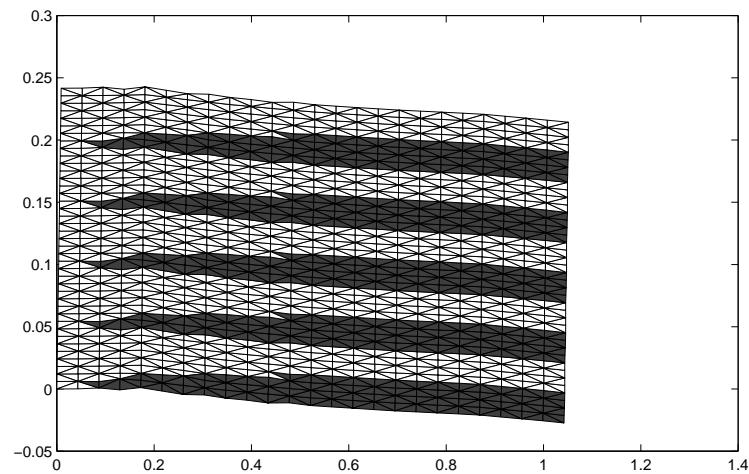
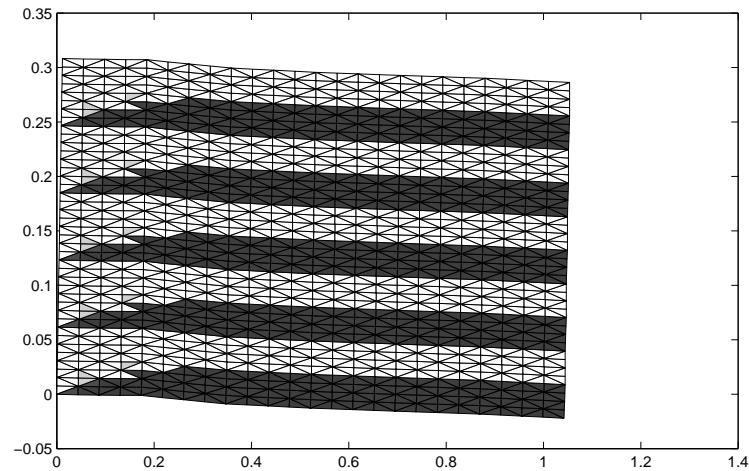
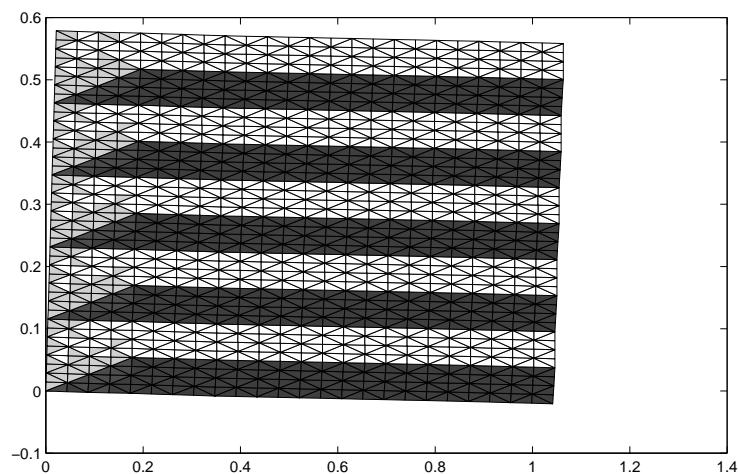
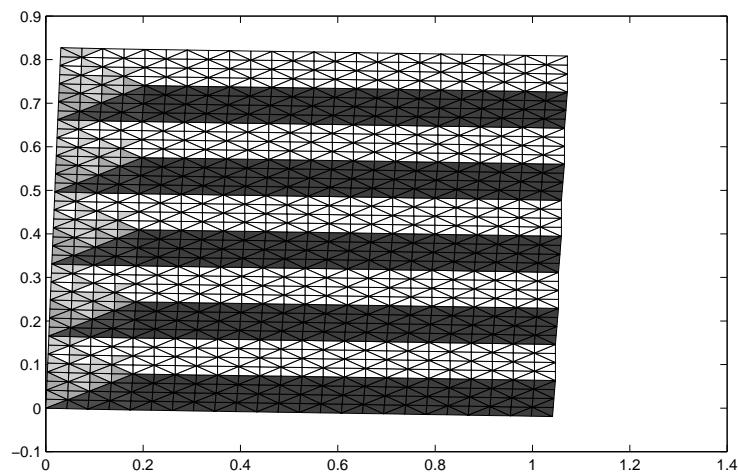
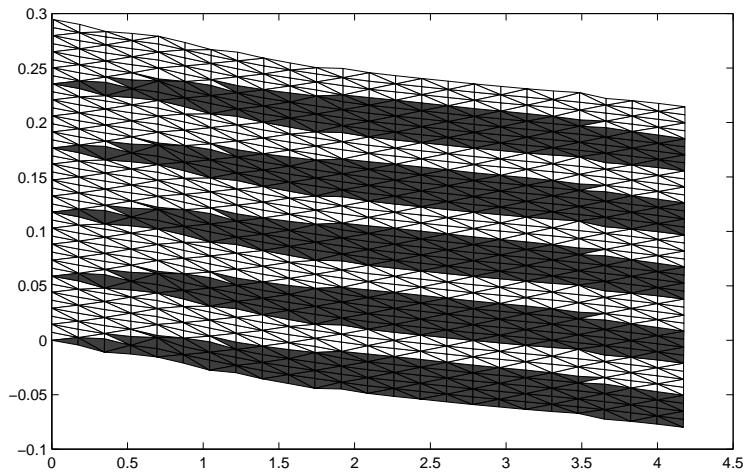
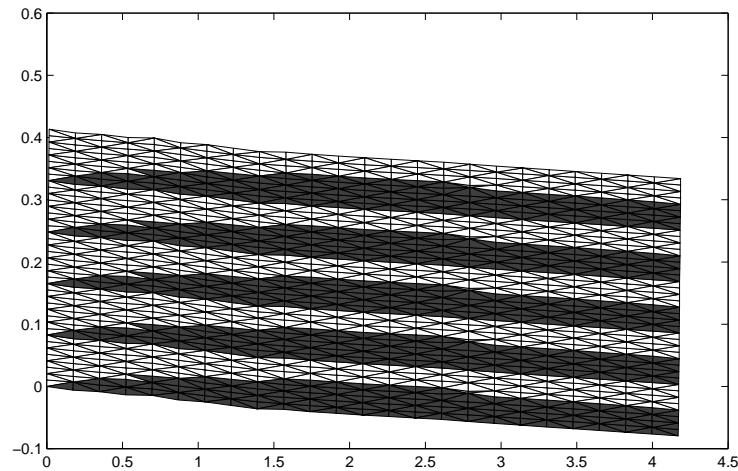


图 6.2: $L1 = 1.0, L2 = 2, \epsilon = 10^{-8}$, 针状结构

图 6.3: $L1 = 1.0$, $L2 = 0.05$, $\epsilon = 10^{-6}$, 分叉结构图 6.4: $L1 = 1.0$, $\epsilon = 10^{-9}$, $L2 = 0.113276$

图 6.5: $L1 = 1.0, \epsilon = 10^{-8}, L2 = 0.232036$ 图 6.6: $L1 = 1.0, \epsilon = 10^{-7}, L2 = 0.296115$

图 6.7: $L1 = 1.0, \epsilon = 10^{-6}, L2 = 0.555941$ 图 6.8: $L1 = 1.0, \epsilon = 10^{-5}, L2 = 0.794845$

图 6.9: $L1 = 4.0, \epsilon = 10^{-8}, L2 = 0.282777$ 图 6.10: $L1 = 4.0, \epsilon = 10^{-7}, L2 = 0.397049$

第三部分

附录

附录甲 : 关于 Young 测度的一个小结果

这里我们证明一个关于 Young 测度的小结果。 Ω 表示 \mathbb{R}^n 中的一个开集。

定理 甲 .1.1 设对一列函数 $f_n(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，存在 Young 测度 ν_x ，使得

$$\varphi(f_n) \xrightarrow{*} \langle \varphi, \nu_x \rangle \text{ in } L^\infty(\Omega)$$

对任意的 $\varphi \in C(\mathbb{R}^m)$ 成立，则对于 \mathbb{R}^n 中的任意集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，如果 E 满足

$$\nu_x(\partial E) = 0 \quad a.e.x \in \Omega \quad (*)$$

就有如下的结果成立：

对几乎处处的 $x \in \Omega$ ，和任意的正实数列 $\{r_k\}$ ， $r_k \rightarrow 0$ ，有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{meas } \{y : y \in B(x, r_k), f_n(y) \in E\}}{\text{meas } B(x, r_k)} = \int_E d\nu_x$$

证明 取开集列 $\{E_l^1\}$ ， $\{E_l^2\}$ ，满足 $E_l^1 \subset \subset E^\circ \subset E \subset \subset E_l^2$ ，且 $E_l^1 \rightarrow E$ ， $E_l^2 \rightarrow E$ 。再取 $\varphi_l^1, \varphi_l^2 \in C(\mathbb{R}^m)$ ，满足 $\varphi_l^1 = \begin{cases} 1 & \text{in } E_l^1 \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^m \setminus E^\circ \end{cases}$ ， $\varphi_l^2 = \begin{cases} 1 & \text{in } \bar{E} \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^m \setminus E_l^2 \end{cases}$ 。于是对任意的 k 有如下关系成立：

$$\begin{aligned} \text{meas } \{y : y \in B(x, r_k), f_n(y) \in E\} &\geq \int_{B(x, r_k)} \varphi_l^1(f_n) dy \\ &\rightarrow \int_{B(x, r_k)} \langle \varphi_l^1, \nu_y \rangle dy \\ &\geq \int_{B(x, r_k)} \nu_y(E_l^1) dy \\ &= \int_{B(x, r_k)} \int_E d\nu_y dy - \int_{B(x, r_k)} \nu_y(E - E_l^1) dy \end{aligned}$$

由于 $\nu_y(\partial E) = 0$ ，容易知道：当 $l \rightarrow \infty$ 时，有 $\nu_y(E - E_l^1) \rightarrow 0$ ， $a.e.y$ ，从而由控制收敛定理可得 当 $l \rightarrow \infty$ 时， $\int_{B(x, r_k)} \nu_y(E - E_l^1) dy \rightarrow 0$ 。于是容易得到：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{meas } \{y : y \in B(x, r_k), f_n(y) \in E\} \geq \int_{B(x, r_k)} \int_E d\nu_y dy$$

同理可得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{meas } \{y : y \in B(x, r_k), f_n(y) \in E\} \leq \int_{B(x, r_k)} \int_E d\nu_y dy$$

从而知道等号成立。

下面我们在等式两边同除以 $\text{meas } B(x, r_k)$ ，并让 $k \rightarrow \infty$ ，由于 $\int_E d\nu_x$ 是可积函数，我们知道 ([72]) 其定义域中几乎处处是 Lebesgue 点，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{meas } B(x, r_k)} \int_{B(x, r_k)} \int_E d\nu_y dy = \int_E d\nu_x$$

于是易见定理得证。

证毕 \square

注甲 .1.2 J.M.Ball 在 [4] 中作为其基本定理的一个推论证明了在 Radon 测度的弱收敛意义下，

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{x, \delta}^n = \nu_x$$

，其中测度 $\nu_{x, \delta}^n$ 定义为 $\langle \nu_{x, \delta}^n, \varphi \rangle = (-\int)_{B(x, \delta)} \varphi(f^n(y)) dy$ ，本文的定理是一个小小的推广。

注甲 .1.3 [81] 的第 6 页上称对任意的可侧集 E ，有

$$\nu_x(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{y \in B(x, \delta) : f_n(y) \in E\}|}{|B(x, \delta)|}$$

，其中 $|\cdot|$ 表示 Lebesgue 测度。我们将看到这是不正确的。有反例如下：

令 $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ ，容易看到，与 $f_n(x)$ 相联系的 Young 测度为 $\nu_x = \delta_1$ ，取 $E = (0, 1)$ ，则有 $\nu_x(E) = 0$ 而另一端为 1，等式不成立。

附录乙 : 距离函数的性质简述

本节中我们将叙述距离函数的一些性质。本节的材料主要来自 [43]。

设 Ω 为 \mathbb{R}^N 中的区域，其边界非空。我们如下定义所谓“距离函数” $d(x)$:

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$$

我们立刻可以看出 $d(x)$ 是 Lipschitz 的。

引理乙 .1.4 设 Ω 有界， $\partial\Omega \in C^k$ 对 $k \geq 2$ 。则存在一个依赖于 Ω 正常数 μ ，使得 $d(x) \in C^k(\Gamma_\mu)$ 。其中

$$\Gamma_\nu := \{x \in \overline{\Omega} \mid d(x) < \mu\}$$

引理乙 .1.5 ([87]) 设 Ω 为 \mathbb{R}^N 中有 Lipschitz 边界的有界开集，并设 A 为 \mathbb{R}^N 中有 C^2 的紧非空边界的开子集，满足 $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \cap \partial A) = 0$ 。定义关于 ∂A 的带符号距离函数 $d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 如下：

$$d(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, A) & x \in \Omega \setminus A \\ -\text{dist}(x, A) & x \in A \cap \Omega \end{cases}$$

则存在 $s > 0$ ，使得 $d \in C^2(\{|d(x)| < s\})$ ，且有

$$|\nabla d| = 1$$

进一步我们有：

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{H}^{N-1}(\{d(x) = s\}) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial A)$$

参考文献

- [1] R.A.Adams, 索伯列夫空间, 叶其孝, 王耀东, 应隆安, 韩厚德, 吴兰成译, 人民教育出版社, 1975.
- [2] R.Abeysaratne, C.Chu, R.James, *Kinetics of materials with wiggly energies: theory and application to the evaluation of twinning microstructures in a Cu-Al-Ni shape memory alloy*, Phil.Mag.A, 1996, 73: 457–497.
- [3] S.Baldo, *Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn-Hilliard fluids*, Ann.Inst.H.Poincaré, Ann.Non Linéaire, 1990, 7, 37–65.
- [4] J.M.Ball, *A version of the fundamental theorem for Young measures*, in **PDE's and Continuum Models of Phase Transitions**, (M.Rascle, D.Serre, and M.Slemrod eds.), Lecture Notes in Physics, 1989, Vol.344, 207–215.
- [5] J.M.Ball, *Convexity conditions and existence theorem in nonlinear elasticity*, Arch.Rational Mech.Anal., 1977, Vol.63, 4, 337–403.
- [6] Kaushik Bhattacharya, *The Microstructure of Martensite and Its Implications for the Shape-Memory Effect*, in **Microstructure and Phase Transition**, IMA 54, 1994, 1–25.
- [7] Giuseppe Buttazzo, **Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations**, Longman, Pitman Research Notes in Mathematics Series 207, 1989.
- [8] Ana Cristina Barroso, Irene Fonseca, *Anisotropic singular perturbations, the vectorial case*, Proc.Roy.Soc.Edin., 1994, Vol.124A, 527–571.
- [9] G.Barsch, B.Horovitz, J.Krumhansl, *Dynamics of twin boundaries in martensites*, Phys.Rev.Lett. 1987, Vol.59, 1251–1254.
- [10] J.M.Ball, R.D.James, *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, Arch. Ration. Mech. Analysis, 1987, Vol.100, 1, 13–52.
- [11] J.M.Ball, R.D.James, *Proposed experimental test of a theory of fine microstructure and the two-well problem*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1992, Vol.338A, 389–450.
- [12] M.Chipot, *Numerical analysis of oscillations in nonconvex problems*, Numer.Math. 1991, Vol.59, 747–767.
- [13] M.Chipot, *Approximation and Oscillations*, in **Microstructure and Phase Transition**, IMA 54, 1994, 27–37.
- [14] M.Chipot, *The appearance of microstructures in problems with incompatible wells and their numerical approach*, Numerische Mathematik, 1999, Vol.83, No.3, 325–352.
- [15] P.G.Ciarlet, **Mathematical Elasticity, Volume 1, Three-Dimensional Elasticity**, North-Holland Amsterdam, 1988.
- [16] P.G.Ciarlet, **The Finite Element Method for Elliptic Problems**, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [17] Charles Collins, *Computation of Twinning*, in **Microstructure and Phase Transition**, IMA 54, 1994, 39–50.
- [18] Michel Chipot, Charles Collins, *Numerical Approximations in Variational Problems with Potential Wells*, SIAM J. Numer. Anal. , 1992, Vol 29, No.4, 1002–1019.

- [19] M.Chipot, C.Collins, D.Kinderlehrer, *Numerical analysis of oscillations in multiple well problems*, Numer.Math., 1995, Vol.70, 259–282.
- [20] T.Claesson, L.Hörmander, *积分论*, 黄明游译.
- [21] C.Collins, D.Kinderlehrer, M.Luskin, *Numerical approximation of the solution of a variational problem with a double well potential*, SIAM.J.Numer.Anal., 1991, Vol.28, 321–332.
- [22] C.Collins, M.Luskin, *The computation of the austensitic-martensitic phase transitions*, in **Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions**, (M.Rascle, D.Serre and M.Slemrod, eds), Springer-Verlag, New York, Lecture Notes in Physics, Vol.344, 1989, 34–50.
- [23] Charles Collins, Mitchell Luskin, James Riordan, *Computational Results for A Two-Dimensional Model of Crystalline Microstructure*, in **Microstructure and Phase Transition**, IMA 54, 1994, 51–57.
- [24] Bernard Dacorogna, **Weak continuity and weak lower semicontinuity of non-linear functionals**, Lecture Notes in Mathematics, Vol.922, Springer-Verlag, 1982.
- [25] Bernard Dacorogna, **Direct Methods in the Calculus of Variations**, Springer-Verlag, 1989.
- [26] G.Dal Maso, **An Introduction to Γ -Convergence**, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [27] Georg Dolzmann, Stefan Müller, *Microstructures with Finite Surface Energy: the Two-Well Problem*, Arch. Ration. Mech. Analysis, 1995, Vol.132, 101–141.
- [28] J. Eshelby, *Elastic inclusions and inhomogeneities*, in **Progress in Solid Mechanics**, vol 2 (I.N.Sneddon and R.Hill, eds), 1961, 87–140.
- [29] J.L.Ericksen, *Constitutive theory for some constrained elastic crystals*, J. Solids and Structures, 1986, Vol.22, 951–964.
- [30] J.L.Ericksen, *Some constrained elastic crystals*, in **Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Problems**, (J.Ball, ed.), Oxford Univ. Press, Oxford, 1987, 119–137.
- [31] J.L.Ericksen, *Twinning of crystals I*, in **Metastability and Incompletely Posed Problems**, (S.Antman, J.Ericksen, D.Kinderlehrer and I.Müller, eds), Springer-Verlag, New York, 1987, IMA volume 3, 77–96.
- [32] Lawrence C. Evans, **Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations**, Providence, R.I. : Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, 1990, c1989.
- [33] Herbert Federer, **Geometric Measure Theory**, Springer-Verlag, 1969.
- [34] Irene Fonseca, *Phase Transitions of Elastic Solid Materials*, Arch.Rat.Mech.Anal., 1989, V.107, No.3, 195–223.
- [35] Nikan B.Firoozye, Robert V.Kohn, *Geometric Parameters and the Relaxation of Multiwell Energies*, in **Microstructure and Phase Transition**, IMA 54, 1994, 85–109.
- [36] Irene Fonseca, Carlo Mantegazza *Second Order Singular Perturbation Models For Phase Transitions*, Carnegie Mellon University, Center of Nonlinear Analysis, Preprint, 1999.
- [37] Irene Fonseca, Luc Tartar, *The gradient theory of phase transitions for systems with two*

- potential wells*, Proc.R.Soc.Edin,1989, Vol.111A, 89–102.
- [38] Enrico Giusti, **Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation**, Birkhäuser, 1984.
 - [39] Pierre-Alain Gremaud, *Numerical Analysis of A Nonconvex Variational Problem Related to Solid-Solid Phase Transitions*, SIAM J. Numer. Anal. , 1994, Vol 31, No.1, 111–127.
 - [40] Morton E.Gurtin, *On Phase transitions with bulk, interfacial, and boundary energy*, Arch.Rat.Mech.Anal., 1986, Vol.96, 243–264.
 - [41] Morton E.Gurtin, *Some Results and Conjectures in the Gradient Theory of Phase Transitions*, in **Metastability and Incompletely Posed Problems**, S.Antman, J.L.Erickson, D.Kinderlehrer, I.Müller eds., IMA Vol.3, Springer-Verlag, 1987, 135–146.
 - [42] L.C.Grove, C.T.Benson, **Finite Reflection Groups**, Springer-Verlag, GTM 99, 2nd ed., 1985.
 - [43] David Gilbarg, Neil S. Trudinger, **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Springer-Verlag, 1977.
 - [44] Ulrich Hornung ed. , **Homogenization and Porous Media**, Springer, IAM 6, 1997.
 - [45] Donald Hearn, M.Pauline Baker, **Computer Graphics**,
 - [46] B.Horovitz, G.Barsch, J.Krumhansl, *Twin bands in martensites: statics and dynamics*, Phys. Rev. B 1991, Vol.43, 1021–1033.
 - [47] Jürgen Jost, Xianqing Li-Jost, **Calculus of Variations**, Cambridge Studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 1998.
 - [48] R.James, D.Kinderlehrer, *Theory of diffusionless phase transitions*, in **PDE's and continuum models of phase transitions**, (M.Rascle, D.Serre and M.Slemrod, eds), Springer-Verlag, Lecture Notes in Physics, vol.344. 1989, 51–84.
 - [49] V.V.Jikov, S.M.Kozlov, O.A.Oleinik, **Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals**, Springer-Verlag, 1994.
 - [50] A.G.Khachaturyan, *Some questions concerning the theory of phase transformations in solids*, Soviet Phys. Solid State, 1967, Vol.8, 2163–2168.
 - [51] A.G.Khachaturyan, **Theory of structural transformations in solids**, Wiley, New York, 1983.
 - [52] S.Kartha, J.A.Krumhansl, J.P.Sethna, L.K.Wickham, *The spin-glass nature of tweed precursors in martensitic transformations*, Phys.Rev.Lett. 1994, Vol.67, 3630(??).
 - [53] S.Kartha, J.A.Krumhansl, J.P.Sethna, L.K.Wickham, *Disorder-driven pretransitional tweed in martensitic transformations*, Phys.Rev.B, 1995, Vol.52, 803(??).
 - [54] P. Klouček, M.Luskin, *Computational Modeling of the Martensitic Transformation with Surface Energy*, Mathl. Comput. Modelling, 1994, Vol.20, No.10/11, 101–121.
 - [55] P. Klouček, M.Luskin, *The computation of the dynamics of martensitic microstructure*, Continuum Mech. Thermodyn. 6, 209–240.
 - [56] Robert V.Kohn, Stefen Müller, *Branching of twins near an austenite-twinned-martensite interface*, Philosophical Magazine A, 1992, Vol 66, No.5, 697–715.
 - [57] Robert V.Kohn, Stefen Müller, *Surface Energy and Microstructure in Coherent Phase Tran-*

- sitions, Comm.Pure.Appl.Math., 1994, Vol.47, 405–435.
- [58] A.G.Khachaturyan, G.Shatalov, *Theory of macroscopic periodicity for a phase transition in the solid state*, Soviet Phys. 1969, JETP 29, 557–561.
- [59] Robert V.Kohn, Peter Sternberg, *Local minimisers and singular perturbations*, Proc. R. Soc. Edin. , 1989, Vol.111A, 69–84.
- [60] Zhiping Li, *Numerical Methods for Minimizers and Microstructures in Nonlinear Elasticity*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 1996, Vol.6, No.7, 957–975.
- [61] Zhiping Li, *Simultaneous numerical approximation of microstructures and relaxed minimizers*, Numer. Math. ,1997, Vol.78, 21–38.
- [62] Zhiping Li, *A Mesh Transformation Method for Computing Microstructures*, Research Report No.24, Inst. of Math. and Sch. of Math. Sci. , Peking University, 1998.
- [63] Zhiping Li, *A Periodic Relaxation Method for Computing Microstructures*, Applied Numerical Mathematics, 2000, Vol.32, 291–303.
- [64] Zhiping Li, *Computations of Needle-Like Microstructures*, Research Report No.57, Inst. of Math. and Sch. of Math. Sci. , Peking University, 1999.
- [65] Zhiping Li, *Mesh Re-Regulation and Quasi-static Numerical Simulation of Austenitic-Martensitic Phase Transition*, Personal Note, 2000.
- [66] M.Luskin, *Approximation of a laminated microstructure for a rotationally invariant, double well energy density*, Num.Math. 1997, Vol.75, 205–221.
- [67] Mitchell Luskin, *On the Computation of Crystalline Microstructure*, Acta Numerica, 1996, Vol.5, 191–257.
- [68] Bo Li, Mitchell Luskin, *Finite elements analysis of microstructure for the cubic to tetragonal transformation*, SIAM J. Numer. Anal. 1998, Vol.35, 1, 376–392.
- [69] Bo Li, Mitchell Luskin, *Theory and Computation for the Microstructure Near the Interface Between Twinned Layers and a Pure Variant of Martensite*, to appear in Materials Sci. Eng. A. ,1998.
- [70] Landau, Lifschitz, *连续媒质电动力学*, § 37, § 39. 周奇译, 人民教育出版社, 1963
- [71] M.Luskin, L.Ma, *Analysis of the finite element approximation of microstructure in micromagnetics*, SIAM J.Numer.Anal. 1992, Vol.29, 320–331.
- [72] 陆善镇, 王昆扬, *实分析*, 北京师范大学出版社, 1997。
- [73] Ling Ma, *Numerical Methods for Nonconvex Variational Principles in Material Sciences, in Numerical Methods in Applied Sciences*, Wei Cai, Zhongci Shi, Chiwang Shu, Jinchao Xu, eds. SCience Press, 1995
- [74] Luciano Modica, *The Gradient Theory of Phase Transitions and the Minimal Interface Criterion*, Arch. Ration. Mech. Analysis, 1987, Vol.98, 123–142.
- [75] Frank Morgan, **Geometric Measure Theory: a beginner's guide**, Academic Press, 1995, 2nd ed.
- [76] F. Murat, *Compacite par compensation*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, serie IV, 1978, Vol.5, 489–507.
- [77] F. Murat, *Compacite par compensation: condition necessarie et suffisante de continuite faible*

- sous une hypothese de range constant*, Annali Scuola Norm.Sup.Pisa, 1981, Vol.8, 69–102.
- [78] S. Müller, *Singular perturbations as a selection criterion for periodic minimizing sequences*, Calc. Var. and Partial Differential Equations, Vol.1, 169–204, 1993.
- [79] L.Ma, N.Walkington, *On algorithms for non-convex optimization*, SIAM J. Numer. Anal. , 32, 900–923.
- [80] L. Nirenberg, *On Elliptic Partial Differential Equations*, Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, 1959, Vol.13, 116–162.
- [81] Pablo Pedregal, **Parametrized Measures and Variational Principles**, Birkhäuser, 1997.
- [82] R.Tyrell Rockafellar, **Convex Analysis**, Princeton University Press, 1970.
- [83] A.Roitburd, *The domain structure of crystals formed in the solid phase*, Soviet Phys. Solid State 1969, Vol.10, 2870–2876.
- [84] A.Roitburd, *Martensitic transformation as a typical phase transition in solids*, Solid State Physics 1978, Vol.34, 317–390.
- [85] S.Silling, *Phase changes induced by deformation in isothermal elastic crystals*, J.of the Mech. and Phys. of Solids 1989, Vol.37, 293–316.
- [86] S.Silling, *Dynamic growth of martensitic plates in an elastic material*, Journal of Elasticity 28, 143–164.
- [87] Peter Sternberg, *The Effect of a Singular Perturbation on Nonconvex Variational Problems*, Arch. Ration. Mech. Analysis, 1988, Vol.101, 209–260.
- [88] Michael Struwe, **Variational methods : applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems** , Springer-Verlag, 1989, 1996(2nd ed.)
- [89] P.Swart, P.Holmes, *Energy minimization and the formation of microstructure in dynamic anti-plane shear*, Arch.Rat.Mech.Anal., 121, 37–85.
- [90] L.Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Research Notes in Mathematics, Nonlinear analysis and mechanics, Heriot-Watt Symposium, Vol.4, ed. R.J.Knops, Pitman Press, 1979, 136–212.
- [91] Y.Wang, L.-Q. Chen, A.Khachaturyan, *Computer simulation of microstructure evolution in coherent solids*, in **Solid-Solid Phase Transformations**, (W.C.Johnson, J.M.Howe, D.E.Laughlin and W.A.Soffa, eds), The Minerals, Metals & Materials Society, 1994, 245–265.
- [92] S.Wen, A.Khachaturyan, J.Morris Jr. , *Computer simulation of a ‘tweed-transformation’ in a idealized elastic crystal*, Metallurgical Trans. A, 1981, 12A, 581–587.
- [93] Ming Wang, Zhiping Li, *Nonconforming Finite Element Analysis of Crystalline Microstructure*, Research Report No.39, Inst. of Math. and Sch. of Math. Sci., Peking University, 1998.
- [94] 杨青, *晶体微结构计算中的非协调元方法*, 北京大学硕士论文, 1999.
- [95] L.C.Young, *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations*, Comptes Rendus de la Societe des Sciences et des lettres de Varsovie, classe III, 1937, Vol.30, 212–234.
- [96] L.C.Young, **Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory**,

Saunders, 1969.

[97] 袁亚湘, 孙文瑜, 最优化理论与方法, 科学出版社, 1997.

[98] William P.Ziemer, **Weakly Differentiable Functions**, Springer-Verlag, 1989.

致谢

本文作者首先要感谢导师应隆安教授。应老师广博的学识和严谨的治学态度，通过三年来的每一堂课，每一次讨论，使作者受益匪浅。

作者还要感谢李治平教授。本文从选题，研究到最后成文都是在李老师的指导和耐心帮助下完成的。

作者还要感谢关心，帮助他的滕振寰教授，张平文教授，徐树方教授，王鸣教授和周铁，郝现军等老师。

计算系机房的刘玲玲老师给大家创造了很好的上机环境，使作者能够顺利地完成计算；在编程过程中，李若同学和计算机系的魏子乐同学给了作者很大的帮助；李晓升同学向作者介绍了非线性偏微分方程和变分法方面的理论和参考书籍；而平时与杨青，林甲富，吴金彪，李铁军，邓炯，张天洁，李凤艳，季晓梅，于炜，田立秀，马莎等同学的讨论也使作者颇有收益。在此一并致谢。