

Zur Stabilität der Gleichgewichtslagen eines Doppelpendels mit geradlinig geführtem Endpunkt

Während das Auffinden von stationären Punkten eines Potentials auf einer Teilmannigfaltigkeit eines euklidischen Raumes keine Schwierigkeiten bereitet (Lagrange'sche Multiplikatorenregel), ist eine Bestimmung der *Stabilität* dieser Punkte in der Regel nicht ohne weiteres möglich. Da aber derartige Fragestellungen in der Form von Potentialen unter (parametrisierten) Nebenbedingungen bei zahlreichen Anwendungen eine Rolle spielen, wäre die Verfügbarkeit eines (einfachen) Verfahrens wünschenswert, welches über die Stabilität entsprechender Gleichgewichtslagen zu entscheiden gestattet. Wie im folgenden ausgeführt, liefert eine einfache, geometrisch interpretierbare Bedingung ein solches Verfahren. Dessen Nutzen wird am Beispiel eines Doppelpendels mit geführtem Endpunkt demonstriert.

1. Eine geometrische Stabilitätsbedingung

Bezeichne $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $V, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ zwei C^2 -Funktionen. Verschwindet ∇G nirgends auf U , so wird durch $G = \gamma$ eine mit γ parametrisierte Schar n -dimensionaler Teilmannigfaltigkeiten M_γ von U definiert (sofern $M_\gamma \neq \emptyset$). Die stationären Punkte von V auf M_γ ergeben sich nach Einführung des Lagrange'schen Multiplikators λ aus $V_{,i} - \lambda G_{,i} = 0$ ($i = 1, \dots, n+1$) sowie $G = \gamma$ ([1]). Bezeichne $\mathbf{x}_\gamma = (x_\gamma^1, \dots, x_\gamma^{n+1})$ eine Lösung dieser Gleichungen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $G_{,n+1}(\mathbf{x}_\gamma) \neq 0$ angenommen werden, was die (lokale) Auflösung der Nebenbedingung $G = \gamma$ in der Form $x_{n+1} = \Phi(x_1, \dots, x_n; \gamma)$ sowie die Elimination des Parameters λ zu $V_{,i}G_{,n+1} - V_{,n+1}G_{,i} = 0$ ($i = 1, \dots, n$) erlaubt. Das (lokal um \mathbf{x}_γ) auf M_γ definierte Potential $\tilde{V}_\gamma(x_1, \dots, x_n) := V(x_1, \dots, x_n, \Phi(x_1, \dots, x_n; \gamma))$ entscheidet über das Stabilitätsverhalten der stationären Punkte von V unter der Nebenbedingung $G = \gamma$ ([2]). Der folgende Satz beschreibt die relevanten Eigenschaften von \tilde{V}_γ ; dabei wird abkürzend $\tilde{\mathbf{x}}_\gamma := (x_\gamma^1, \dots, x_\gamma^n)$ gesetzt.

Satz *Unter den angeführten Bedingungen ist \tilde{V}_γ bei $\tilde{\mathbf{x}}_\gamma$ zweimal stetig differenzierbar, $\nabla \tilde{V}_\gamma = 0$ liefert lokal um $\tilde{\mathbf{x}}_\gamma$ die Extremalen von V auf M_γ . Mit den gemäß $H_i := V_{,i}G_{,n+1} - V_{,n+1}G_{,i}$ ($i = 1, \dots, n$) erklärten C^1 -Funktionen $H_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ gilt*

$$\text{Det} \left((\tilde{V}_{\gamma,ij}(\tilde{\mathbf{x}}_\gamma))_{i,j=1}^k \right) = [G_{,n+1}(\mathbf{x}_\gamma)]^{-(k+1)} \begin{vmatrix} H_{1,1}(\mathbf{x}_\gamma) & \dots & H_{1,k}(\mathbf{x}_\gamma) & H_{1,n+1}(\mathbf{x}_\gamma) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ H_{k,1}(\mathbf{x}_\gamma) & \dots & H_{k,k}(\mathbf{x}_\gamma) & H_{k,n+1}(\mathbf{x}_\gamma) \\ G_{,1}(\mathbf{x}_\gamma) & \dots & G_{,k}(\mathbf{x}_\gamma) & G_{,n+1}(\mathbf{x}_\gamma) \end{vmatrix}; \quad (1)$$

insbesondere ist $\text{Det} \left((\tilde{V}_{\gamma,ij}(\tilde{\mathbf{x}}_\gamma))_{i,j=1}^n \right) = \alpha (\nabla H_1(\mathbf{x}_\gamma) \times \dots \times \nabla H_n(\mathbf{x}_\gamma)) \cdot \nabla G(\mathbf{x}_\gamma)$ mit $\alpha \neq 0$.

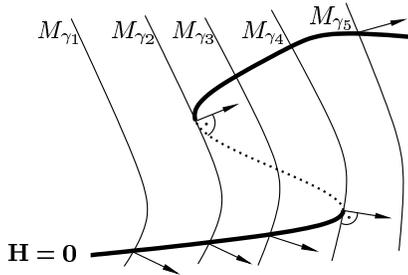


Abb.1 Nur für γ_2 und γ_4 ist eine Änderung des Stabilitätsverhaltens möglich.

Unter der Regularitätsvoraussetzung $\text{Rg}(\nabla H_1(\mathbf{x}_\gamma), \dots, \nabla H_n(\mathbf{x}_\gamma)) = n$ ist die Matrix $(\tilde{V}_{\gamma,ij}(\tilde{\mathbf{x}}_\gamma))_{i,j=1}^n$ also genau dann regulär, wenn die durch $H_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) definierte Kurve die Mannigfaltigkeit M_γ in \mathbf{x}_γ transversal durchsetzt. Diese letztgenannte Bedingung ist geometrischer Natur und klarerweise invariant gegenüber lokalen Diffeomorphismen in U (Koordinatenwechsel). Änderungen im Stabilitätsverhalten der Ruhelage \mathbf{x}_γ können mithin nur in Form eines nicht-transversalen Schnittes auftreten (vgl. Abb.1). Von erheblicher praktischer Bedeutung ist die Tatsache, daß die Bestimmung der rechten Seite in (1) und folglich die Anwendung des Satzes keine explizite Auflösung der Bestimmungsgleichung $G = \gamma$ erfordert. (Insbesondere ist die konkrete Gestalt der Abbildung Φ hierfür ohne Bedeutung.)

2. Anwendungsbeispiel: Doppelpendel mit geradlinig geführtem Endpunkt

Die Anwendung der angeführten Bedingung wird nunmehr anhand eines einfachen mechanischen Systems erläutert. Für ein aus zwei homogenen Stäben (Masse ρ pro Längeneinheit) mit den Längen l_1 bzw. l_2 gebildetes reibungsfreies

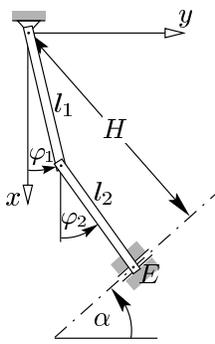


Abb.2 Skizze Doppelpendel

des Endpunktes E erweist sich die Umrechnung $(\varphi_1, \varphi_2) \leftrightarrow (\xi_E, \eta_E)$ als lokaler Diffeomorphismus auf dem offenen Kreisring $R := \{(\xi_E, \eta_E) | (1-\lambda)^2/(1+\lambda)^2 < \xi_E^2 + \eta_E^2 < 1\}$. Die Untersuchung im (ξ_E, η_E) -System macht den Vorteil einer *geometrischen*, von den gewählten Koordinaten unabhängigen Stabilitätsbedingung besonders augenfällig. Nur wenige Beispiele aus der Vielzahl der sich bei Variation der Parameter λ und γ einstellenden Konfigurationen des Doppelpendels können hier skizziert werden. Die zur Festlegung der Stabilität möglicher Gleichgewichtslagen mittels

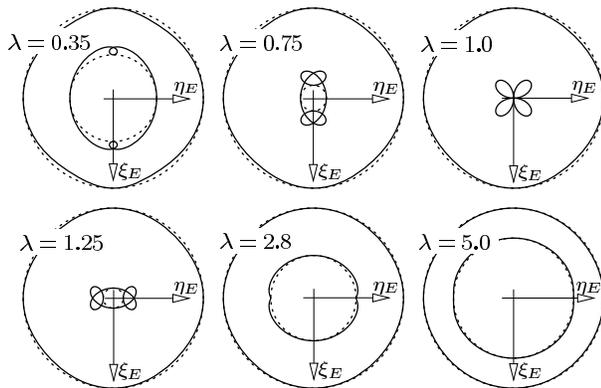


Abb.3 Gleichgewichtsdiagramm für $\alpha = \frac{\pi}{2}$
(Der Rand des Kreisringes R ist strichliert eingezeichnet.)

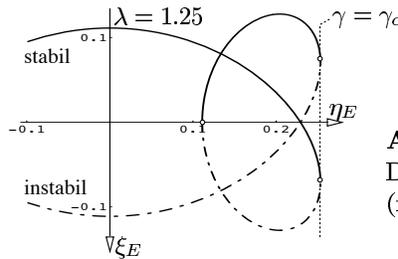


Abb.4
Diagrammdetail
(mit Stabilität)

Für $\alpha \notin \{0, \frac{\pi}{2}\}$ halbiert sich die Anzahl der Symmetrien. (Abb.5 skizziert die Situation für den Fall $\alpha = \frac{\pi}{4}$.) Während die nun kompliziertere Gleichgewichtsbedingung praktisch jede explizite Rechnung verhindert, stellt die geometrische Argumentation wie zuvor in effizienter Weise die gewünschte Stabilitätsaussage zur Verfügung.

3. Literatur

- 1 HEUSER , H. : Lehrbuch der Analysis 2, Teubner, 1991.
- 2 PARKUS , H. : Mechanik der festen Körper, Springer, 1966.

Adresse: DR. ARNO BERGER

Technische Universität Wien, Institut für Mechanik, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040 Wien

Doppelpendel erhält man nach Einführung des Geometrieparameters $\lambda := l_2/l_1$ für das dimensionslose Potential $V := 2E_{pot}/(\rho g l_1^2)$ den Ausdruck

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = -(1 + 2\lambda) \cos \varphi_1 - \lambda^2 \cos \varphi_2, \quad (2)$$

während die von der Führung des Endpunktes E in einer um den Winkel α geneigten Rille ($0 \leq \alpha < \pi$) herrührende Nebenbedingung mit $\gamma := H/(l_1 + l_2)$ die Form

$$G(\varphi_1, \varphi_2) := \frac{1}{1+\lambda} (\cos(\varphi_1 - \alpha) + \lambda \cos(\varphi_2 - \alpha)) \stackrel{!}{=} \gamma \quad (3)$$

annimmt (vgl. Abb.2). Interessanter als in (φ_1, φ_2) -Koordinaten stellt sich aus mechanischer Sicht das Stabwerk allerdings im kartesischen (x, y) -System dar. Mit den dimensionslosen Koordinaten

$$\xi_E := x_E/(l_1 + l_2) = \frac{1}{1+\lambda} (\cos \varphi_1 + \lambda \cos \varphi_2),$$

$$\eta_E := y_E/(l_1 + l_2) = \frac{1}{1+\lambda} (\sin \varphi_1 + \lambda \sin \varphi_2)$$

der Beziehung (1) erforderliche Funktion H_1 ist unmittelbar aus (2) und (3) zu gewinnen. Im Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ weist die Menge der stationären Punkte ($H_1 = 0$) zwei, für $\lambda = 1$ sogar vier Symmetrien auf (siehe Abb.3); die Nebenbedingung (3) reduziert sich zu $\eta_E = \gamma$. Je nach Geometrie existieren für bestimmte Werte von γ bis zu *sechs* Gleichgewichtslagen; da ∇H_1 auf keiner der Kurven M_γ verschwindet, liefert der früher angegebene Satz sofort das zugehörige Stabilitätsverhalten. Abb.4 zeigt letzteres in einem Ausschnitt des Gleichgewichtsdiagrammes für jene Konfigurationen, die bei $|\gamma| \leq \gamma_c$ zusätzlich zu den offensichtlichen, weitgehend gestreckten Lagen (entsprechend den jeweils äußeren Kurven in Abb.3) zu beobachten sind. (Die scheinbaren Schnitte stabiler bzw. instabiler Pfade in Abb.4 sind in der Art der Darstellung begründet: Der natürliche Zustandsraum des Doppelpendels ist der den Kreisring R zweiblättrig überlagernde 2-Torus.) Eine genauere Analyse ergibt

$$\gamma_c = \max \left\{ \frac{|1-\lambda|}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{\sqrt{1+3\lambda}} \left(\frac{(1+2\lambda)^{\frac{2}{3}} - 1}{1+\lambda} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Man beachte, daß im Gegensatz zur erläuterten effizienten Vorgangsweise selbst im vorliegenden Fall eines einfachen zweidimensionalen Problems die explizite Auflösung der Nebenbedingung (3) nicht in praktikabler Weise zu bewerkstelligen ist.

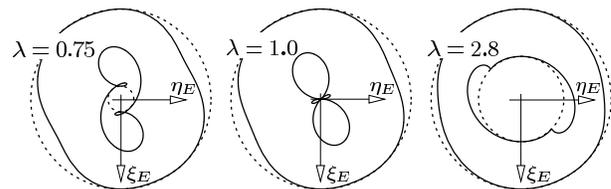


Abb.5 Gleichgewichtsdiagramm für $\alpha = \frac{\pi}{4}$