

## Zum praktischen Nachweis von Chaos mit Hilfe der Conley-Index-Theorie

Die rigorose Analyse komplizierter dynamischer Phänomene stellt im konkreten Einzelfall meist eine anspruchsvolle Aufgabe dar. So ist etwa ein definitiver Nachweis chaotischen Systemverhaltens in vielen Fällen trotz entsprechender numerischer Evidenz nicht zu erbringen. Eine (wenigstens teilweise) Beantwortung der Frage, ob und in welchem Ausmaß Chaos in einem konkreten Modell vorliegt, wäre aber häufig von erheblicher praktischer Bedeutung. Naturgemäß sollten entsprechende Aussagen auch robust sein (Parameterschwankungen, Ungenauigkeiten des Modells etc., vgl. [2]). Spätestens durch die mittlerweile berühmte Arbeit von Mishaikow und Mrozek über Chaos in den Lorenz-Gleichungen ([4]) wurde deutlich, daß die *Conley-Index-Theorie* isolierter invarianter Mengen prinzipiell in der Lage ist, derartige Aussagen bereitzustellen. Wie im weiteren ausgeführt, eröffnet die konsequente Umsetzung dieser Theorie die Möglichkeit, auch für komplizierte Systeme einfach und elegant Ergebnisse zu erzielen, welche mit anderen Methoden nicht oder nur unter ungleich größerem Aufwand gewonnen werden können. Obwohl die in der Literatur (etwa [3],[7]) anzutreffenden kategoriellen Konstruktionen teilweise recht komplex sind, liegen der Methode an sich einfache topologische Ideen zugrunde (vgl. [1],[2]).

### 1. Theoretische Grundlagen

Es werden zunächst die im weiteren benötigten Tatsachen über diskrete Systeme zusammengestellt. Dazu bezeichne  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit  $X$  und  $N \subseteq X$  eine unter  $f$  isoliert invariante Menge. Ein Paar  $A = \overline{(A_1, A_2)}$  kompakter Teilmengen von  $X$  mit  $A_1 \supseteq A_2$  heißt *Indexpaar* für  $N$ , falls die Bedingungen  $N = \text{inv}_f A_1 \setminus A_2 \subseteq \text{int} A_1 \setminus A_2$  sowie  $f(A_2) \cap A_1 \subseteq A_2$  und  $A_1 \setminus A_2 \subseteq f^{-1}(A_1)$  erfüllt sind. Es induziert  $f$  dann eine stetige Selbstabbildung  $f_A$  des punktierten Faktorraumes  $(A_1/A_2, [A_2])$  (vgl. [3],[7]). Wie in [1] ausgeführt, kann  $f_A : A_1/A_2 \rightarrow A_1/A_2$  als Modell für die Aktion von  $f$  auf  $N$  angesehen werden. Das Zerfallen der isolierenden Nachbarschaft  $A_1 \setminus A_2$  in  $l \geq 2$  disjunkte Teile  $B_1, \dots, B_l$  und die daraus resultierenden Eigenschaften der Dynamik lassen sich mit Hilfe einer von A. Szymczak eingeführten Konstruktion ([7]) präzise beschreiben. Zu diesem Zweck wird  $I := \mathcal{P}(\{1, \dots, l\})$  gesetzt und für  $i \in I$ , je nachdem, ob  $x \in \bigcup_{\lambda \in i} B_\lambda$  oder nicht, durch  $r_i(x) := x$  oder  $[A_2]$  eine Schar  $(r_i)_{i \in I}$  stetiger Projektionen in  $(A_1/A_2, [A_2])$  definiert. Das eigentliche *Indexobjekt* ist dann  $((A_1/A_2, [A_2]), (f_A \circ r_i)_{i \in I})$ . Es läßt sich zeigen, daß in einem geeigneten kategoriellen Rahmen die konkrete Wahl des Indexpaares  $A$  (bis auf Isomorphie) keinen Einfluß auf die Gestalt des Indexobjektes hat ([7]), letzteres daher eine Kenngröße für die Dynamik auf  $\text{inv}_f A_1 \setminus A_2$  darstellt. Eine daraus resultierende Invariante ist insbesondere  $CH_f((N \cap B_j)_{j=1}^l, f) := (H^*(A_1/A_2, [A_2]), H^*(f_A \circ r_i)_{i \in I})$ ; dabei bezeichnet  $H^*$  eine geeignete Cohomologietheorie mit  $\mathbf{Q}$ -Koeffizienten. In der Terminologie von [7] ist  $CH_f((N \cap B_j)_{j=1}^l, f)$  der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte (*cohomologische*) *Conley-Index* von  $N$  unter  $f$  bei Vorliegen der Zerlegung  $(B_j)$ .

Entscheidend für den praktischen Einsatz der Conley-Index-Theorie ist die Frage, welche Information über die Dynamik des untersuchten Systems aus einer speziellen Indexgestalt gewonnen werden kann. Protokolliert man den Orbit eines Punktes  $x \in N$  in Form der Folge  $\rho(x)$  seiner Aufenthalte in den Mengen  $B_j$ , d.h.  $\rho(x)_n = j$  genau wenn  $f^n(x) \in B_j$ , so erhält man eine stetige Abbildung  $\rho : N \rightarrow \Sigma_l$  in den Raum der (einseitigen) Folgen über  $l$  Symbolen; mit der Shiftabbildung  $\sigma : \Sigma_l \rightarrow \Sigma_l$  gilt offensichtlich  $\rho \circ f = \sigma \circ \rho$ . Zwei wichtige Aspekte der Menge  $\rho(N) \subseteq \Sigma_l$  beschreibt der folgende Satz (umfassendere Resultate findet man in [1] und [7]).

**Satz 1** (Szymczak) *Sei  $(A_1, A_2)$  ein Indexpaar für  $N = \text{inv}_f \overline{A_1 \setminus A_2}$  unter  $f$ , welches eine Zerlegung  $(B_j)_{j=1}^l$  von  $A_1 \setminus A_2$  gestattet. Außerdem existiere eine Zahl  $k_0 \in \mathbf{Z}$  mit  $H^k(A_1/A_2, [A_2]) = \{0\}$  für  $k \neq k_0$ . Dann gilt:*

(i) *Jede periodische Folge  $(s_0, \dots, s_{T-1}, s_0, \dots) \in \Sigma_l$  mit primitiver Periode  $T \in \mathbf{N}$ , die*

$$\text{sp} (H^{k_0}(f_A) \circ H^{k_0}(r_{\{s_0\}}) \circ \dots \circ H^{k_0}(f_A) \circ H^{k_0}(r_{\{s_{T-1}\}})) \neq 0$$

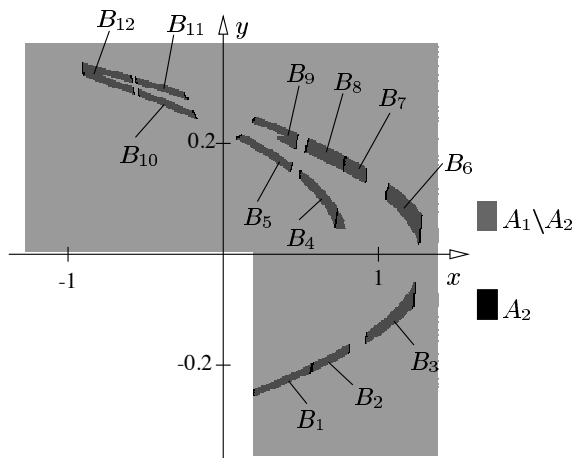
*erfüllt, ist  $\rho$ -Bild eines Punktes in  $N$  mit primitiver Periode  $T$ .*

(ii) *Mit der durch  $\Sigma_0 := \{s \in \Sigma_l \mid H^{k_0}(f_A) \circ H^{k_0}(r_{\{s_0\}}) \circ \dots \circ H^{k_0}(f_A) \circ H^{k_0}(r_{\{s_n\}}) \neq 0 \ \forall n \in \mathbf{N}_0\}$  definierten Teilmenge von  $\Sigma_l$  besteht die Inklusion*

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}_0} \sigma^n(\Sigma_0) \subseteq \rho(N) .$$

Einem zentralen Resultat der Conley-Index-Theorie zufolge besitzt jede isolierte invariante Menge ein Indexpaar und damit einen wohldefinierten Index. Der entsprechende Existenzsatz ist aber auf Grund seines nichtkonstruktiven Charakters für praktische Belange unbrauchbar. Auch erfordert die explizite Konstruktion von isolierenden Nachbarschaften und Indexpaaren bereits ein *globales* Verständnis der Systemdynamik, das zu gewinnen eigentlich Ziel (und nicht Voraussetzung) des Einsatzes der Conley-Index-Theorie sein sollte. Es ist der *topologische* Charakter der Theorie, welcher eine Überwindung dieser Schwierigkeiten gestattet. Die Robustheit gegenüber (kleinen) Störungen des zugrundeliegenden dynamischen Systems ermöglicht es nämlich, eine Indextheorie für *mengenwertige* Systeme zu entwickeln. Mit derartigen Systemen ist man im Zuge einer Fehleranalyse des numerischen Rechnens bei Verwendung rigoroser Fehlerschranken zwanglos konfrontiert. Da sich der Einsatz moderner Computer zur Analyse komplizierter dynamischer Phänomene nachdrücklich anbietet, ist die Entwicklung einer entsprechenden Indextheorie auch von großer praktischer Bedeutung. Letzten Endes erweist sich der Conley-Index als *vererbare* und *erreichbare* Größe. Dies bedeutet im wesentlichen, daß sich der gesuchte Index aus einer mengenwertigen Approximation des zu untersuchenden Systems berechnen läßt, sofern diese nur hinreichend fein ist – sofern also genug Rechenleistung zur Verfügung steht ([1]). Es sei hier lediglich angemerkt, daß im Zuge des rigorosen Aufbaues einer Indextheorie für mengenwertige Systeme im Detail erhebliche mathematische Schwierigkeiten zu überwinden sind (vgl. [1],[5],[7]).

Die Möglichkeiten der Methode werden am Beispiel der bekannten Hénon-Abbildung illustriert. In der Abbildungsfamilie  $h_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $(x,y) \mapsto (1 - ax^2 + y, bx)$  läßt sich für  $(a,b) = (1.4, 0.3)$  im numerischen Experiment ein seltsamer Attraktor beobachten, dessen Struktur gegenwärtig als bestenfalls teilweise verstanden gilt. Beschränkt man die Untersuchung auf den in der Abbildung hellgrau dargestellten Bereich und diskretisiert diesen in etwa  $10^5$  Zellen, so liefert eine Variante des in [7] beschriebenen Algorithmus ein in *zwölf* disjunkte Teile zerfallendes Indexpaar (in einem schwächeren Sinn als einleitend definiert, vgl. [1],[7]). Dieses Paar  $(A_1, A_2)$  ist in der graphischen Darstellung dunkelgrau bzw. schwarz gekennzeichnet. Es ist hier  $k_0 = 1$  und  $\dim H^1(A_1/A_2, [A_2]) = 13$ . (Alle erforderlichen Rechnungen wurden auf einem Power PC 603/120Mhz durchgeführt.) Während  $H^1(r_i)$  einfach



Ein (schwaches) Indexpaar für  $h_{1.4,0.3}$

die Projektion auf den entsprechenden Unterraum von  $\mathbb{Q}^{13}$  beschreibt, wird  $H^1(h_A)$  durch eine  $13 \times 13$ -Matrix repräsentiert, die lediglich Einträge 1, 0 und -1 aufweist. Eine eingehende algebraische Analyse dieser Matrix im Hinblick auf Satz 1 führt schließlich auf folgendes Ergebnis (vgl. [1]).

**Satz 2** In einer offenen Umgebung des Parameterwertes  $(a,b) = (1.4, 0.3)$  gilt:

- (i) Die Menge  $\text{inv}_{h_{a,b}} \overline{A_1 \setminus A_2}$  enthält Punkte jeder primitiven Periode  $T \in \mathbb{N} \setminus \{3, 5\}$ .
- (ii) Die Abbildung  $\rho : \text{inv}_{h_{a,b}} \overline{A_1 \setminus A_2} \rightarrow \Sigma_{12}$  stiftet eine Semikonjugation auf einen chaotischen Subshift  $\Sigma_{12, \Omega}$  von endlichem Typ. (Die Matrix  $\Omega \in \{0, 1\}^{12 \times 12}$  läßt sich direkt aus einer Koordinatendarstellung von  $H^1(h_A)$  ermitteln.)

Satz 2 erweitert die Aussagen in [7] und zeigt deutlich die Leistungsfähigkeit der Methode auf. Auf mathematisch strenge Weise (wenn auch unter Verwendung der Rechenleistung eines Computers) wird eine Form chaotischen Verhaltens für  $h_{1.4,0.3}$  nachgewiesen. Man vergleiche darüberhinaus die Stabilität des gewonnenen Resultates mit der Tatsache, daß der Hénon-Attraktor nicht strukturstabil ist.

### 3. Literatur

- 1 BERGER, A. : Anwendungen der Conley-Index-Theorie zum Nachweis chaotischen Systemverhaltens. Diss. TU Wien, 1997.
- 2 CONLEY, C. : Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional conference series in Mathematics **38**(1978).
- 3 MISCHAIKOW, K. : Conley Index Theory. Lecture Notes in Mathematics **1609**(1995).
- 4 MISCHAIKOW, K.; MROZEK, M. : Chaos in the Lorenz equations: a computer assisted proof. Bull. AMS **32**(1995), 66–72.
- 5 MROZEK, M. : Topological invariants, multivalued maps and computer-assisted proofs in dynamics. Preprint, 1996.
- 6 SZYMCAK, A. : The Conley index for decomposition of isolated invariant sets. Fund. Math. **148**(1995), 71–90.
- 7 SZYMCAK, A. : A combinatorial procedure for finding isolating neighbourhoods and index pairs. Preprint, 1996.

Adresse: DR. ARNO BERGER

Technische Universität Wien, Institut für Mechanik, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040 Wien