Нестандартная дискретизация и продолжение по Лебу семейства мер

В. Г. Троицкий

Аннотация. В первой части работы проводится дискретизация интегрального оператора методами нестандартного анализа. Доказывается, что интегральный оператор можно с точностью до бесконечно малого приблизить матрицей бесконечно большого размера. Во второй части строится конструкция меры Леба для случайной меры и рассматривается связь этой конструкции с векторными мерами Леба и нестандартными оболочками. Библиогр. 7.

Данная работа состоит из двух частей. В первой проводится дискретизация интегрального оператора, использующая полученную Е. И. Гордоном дискретизацию интеграла. Основной результат заключается в том, что, заменяя функции векторами, составленными из их значений в конечном (но бесконечно большом) числе точек, можно с точностью до бесконечно малого аппроксимировать интегральный оператор матрицей бесконечно большого размера. Во второй части строится конструкция меры Леба для случайной меры. Доказывается, что получится тот же объект, если рассматривать случайную меру как векторную и строить для нее меру Леба как для векторной меры.

Изложение ведется на языке теории Каваи NST, однако все рассуждения верны и в рамках классического робинсоновского нестандартного анализа. По умолчанию рассматриваемые объекты предполагаются внутренними. Для стандартного множества A будем обозначать через ${}^{\circ}A$ стандартное ядро A, т. е. совокупность всех его стандартных элементов.

1. Дискретизация интегрального оператора

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой. Тогда найдутся конечный набор $X = (x_1, \dots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и положительное*

Подана 11 декабря 1991 г., г.Новосибирск. UDC 517.11.

число Δ такие, что для любой стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu = {}^{\circ}\Big(\Delta \sum_X f\Big),$$

где $\sum\limits_X f$ означает $\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i)$.

Однако нам понадобится несколько более сильный результат.

Теорема 2. *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой. Тогда для любого бесконечно малого положительного ε найдутся конечный набор $X = (x_1, \dots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и положительное число Δ такие, что для любой стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*

$$\Big|\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu - \Delta \sum_X f\Big| \leqslant \varepsilon.$$

В этом случае будем говорить, что *пара (X, Δ) аппроксимирует меру μ* с точностью до ε.

Для конечной меры теорема 2 получена Е. И. Гордоном в работе [1] в ходе доказательства теоремы 1. Доказательство теоремы 2 в случае σ-конечной меры можно получить, несколько модифицировав это доказательство. Нам потребуются некоторые определения и факты из статьи [2]. Произвольный элемент τ называется *допустимым*, если он является элементом какого-нибудь стандартного множества. Элемент ξ называется *стандартным относительно допустимого элемента τ (τ-стандартным)*, если существует стандартная функция f такая, что для любого $b \in \operatorname{dom} f$ множество $f(b)$ конечно, $\tau \in \operatorname{dom} f$, $\xi \in f(\tau)$. В статье [2] показано, что принципы переноса и идеализации остаются справедливыми, если каждое вхождение предиката "X стандартно" заменить в них предикатом "X, τ -стандартно" для любого фиксированного допустимого τ. Действительное число r называется *τ-бесконечно малым* ($r \overset{\tau}{\approx} 0$), если $|r| < t$ для любого положительного τ-стандартного t, и *τ-бесконечно большим,* если $r^{-1} \overset{\tau}{\approx} 0$.

Отсюда следует, что если последовательность $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ стандартна относительно τ, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$ в том и только в том случае, когда $r_N \overset{\tau}{\approx} r$ для любого τ-бесконечно большого N.

Для доказательства теоремы 2 нам также потребуется

Теорема 3. *[1]. Пусть τ — допустимое множество, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — τ-стандартное пространство с вероятностной мерой. Тогда существует последовательность*

$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathcal{X}$ такая, что для любой τ-стандартной интегрируемой функции $f\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i).$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стандартная последовательность измеримых подмножеств $\mathcal{X}$ такая, что $\mathcal{X}_n\subset\mathcal{X}_{n+1}$, $\mu(\mathcal{X}_n)<\infty$ для всех n и $\mathcal{X}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{X}_n$. Из равенства

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathcal{X}_n} f\,d\mu$$

и того, что последовательность $\Big(\int\limits_{\mathcal{X}_n} f\,d\mu\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ стандартна (а значит, и ε-стандартна), следует, что

$$\int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu \overset{\varepsilon}{\approx} \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu$$

для любого ε-бесконечно большого N. А поскольку число $\varepsilon/2$ ε-стан- дартно, то

$$\Bigg|\int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu - \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu\Bigg| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим пространство $(\mathcal{X}_N,\mathcal{A}_N,\mu_N)$, где $\mathcal{A}_N=\{A\cap\mathcal{X}_N | A\in\mathcal{A}\}$ и $\mu_N=\frac{1}{\mu(\mathcal{X}_N)}\mu\big|_{\mathcal{A}_N}$ — вероятностная мера. Это пространство, очевидно, N-стандартно, и по теореме 3 найдется такая внутренняя последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathcal{X}$, что для любой N-стандартной функции $g\in\mathcal{L}_1(\mathcal{X}_N,\mathcal{A}_N,\mu_N)$

$$\int\limits_{\mathcal{X}_N} g\,d\mu_N = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i),$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) = \int\limits_{\mathcal{X}_N} g\,d\mu.$$

Последовательность $\left(\frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (ξ,N)-стандартна. Поэтому если K — (ξ,N)-бесконечно большое число, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \overset{(\xi,N)}{\approx} \frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{K}\sum_{i=0}^{K-1} g(\xi_i).$$

Положим $X = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\Delta = \frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{K}$. Тогда $\int\limits_{\mathcal{X}_N} g\,d\mu \overset{(\xi,N)}{\approx} \Delta \sum\limits_X g$. Поскольку функция f стандартна, а значит, и N-стандартна, а число $1/N$ является (ξ, N)-стандартным, то

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu - \Delta \sum_X f \right| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Теперь, вспомнив, что число N ε-бесконечно большое, получаем неравенство $1/N < \varepsilon/2$, откуда

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu - \Delta \sum_X f \right| \leqslant \left| \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu - \int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu \right| + \left| \int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu - \Delta \sum_X f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Поскольку в доказательстве теоремы 2 используются лишь принципы переноса и идеализации, справедливо

Следствие 4. *Пусть τ — допустимое множество, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — τ-стан- дартное пространство с σ-конечной мерой. Тогда для любого положительного ε найдутся конечный набор $X = (x_1, \dots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и положительное число Δ такие, что для любой τ-стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu - \Delta \sum_X f \right| \leqslant \varepsilon.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая техническая

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{Y}$,$\mathcal{L}$ — стандартные множества, $F : {}^\circ\mathcal{Y} \to \mathcal{P}^{Int}(\mathcal{L})$ и ${}^\circ\mathcal{L} \subset \bigcap\limits_{y \in {}^\circ\mathcal{Y}} F_y$. Тогда существует внутреннее множество $\mathcal{F}$ такое, что ${}^\circ\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \bigcap\limits_{y \in {}^\circ\mathcal{Y}} F_y$.*

Доказательство. Доказательство. Продолжим F до внутренней функции $F : \mathcal{Y} \to \mathcal{P}^{\mathrm{Int}}(\mathcal{L})$ (в теории Каваи такое продолжение обеспечивает принцип идеализации, в рамках же робинсоновского анализа потребуется α-насы- щенность, где α — мощность ${}^\circ\mathcal{Y}$). По условию $l \in F_y$ для любых $y \in {}^\circ\mathcal{Y}$ и $l \in {}^\circ\mathcal{L}$, т. е. для любой пары $(y, l) \in {}^\circ(\mathcal{Y} \times \mathcal{L})$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $(y_1, l_1), \dots, (y_n, l_n) \in {}^\circ(\mathcal{Y} \times \mathcal{L})$. Тогда, положив $\mathcal{F} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{y_i}$, получаем $l_i \in \mathcal{F} \subset F_{y_i}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Отсюда согласно принципу идеализации (или принципу насыщения) следует существование внутреннего $\mathcal{F}$ такого, что $l \in \mathcal{F} \subset F_y$ для всех $(y, l) \in {}^\circ(\mathcal{Y} \times \mathcal{L})$, т. е. ${}^\circ\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \bigcap\limits_{y \in {}^\circ\mathcal{Y}} F_y$. $\square$

Пусть теперь $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \lambda_y)_{y \in \mathcal{Y}}$ — стандартное семейство пространств с σ-конечными мерами, т. е. $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — стандартные множества, $\mathcal{A}$ — стандартная σ-алгебра подмножеств $\mathcal{X}$, и $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ — стандартная функция такая, что для каждого $y \in \mathcal{Y}$ функция $\lambda_y = \lambda(\cdot, y) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ является σ-конечной мерой на $\mathcal{X}$.

Введем обозначения: $\mathcal{F}(\mathcal{Y}) = \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$, $\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \,|\, f \quad \lambda_y\text{-интегрируема для всех } y \in \mathcal{Y}\}$. Для конечного набора $X = (x_1, \dots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ обозначим символом π_X “проектор” из $\mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ в $\mathbb{R}^N$, сопоставляющий функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ вектор $(f(x_1), \dots, f(x_N))$. Аналогично для конечного набора $Y = (y_1, \dots, y_M)$ элементов $\mathcal{Y}$ определим $\pi_Y : \mathcal{F}(\mathcal{Y}) \to \mathbb{R}^M$ по правилу $\pi_Y(F) = (F(y_1), \dots, F(y_M))$. Обозначим через T псевдоинтегральный оператор, действующий из $\mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ в $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ следующим образом: $(Tf)(y) = \int\limits_{\mathcal{X}} f\, d\lambda_y$.

Теорема 6. *Дискретизация псевдоинтегрального оператора Существуют конечные наборы $X = (x_1, \dots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и $Y = (y_1, \dots, y_M)$ элементов $\mathcal{Y}$, причем ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y$, а также матрица Λ размера $N \times M$ такие, что для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ выполнено $\pi_Y(Tf) \approx \Lambda \pi_X(f)$, т. е. $\int f\, d\lambda_{y_j} \approx \sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i)\Lambda_{ij}$ $(j = 1, \dots, M)$. Другими словами, диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \mathcal{F}(\mathcal{Y}) \arrow[d, "\pi_Y"'] \\
\mathbb{R}^N \arrow[r, "\Lambda"] & \mathbb{R}^M.
\end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до бесконечно малого.

Доказательство. Доказательство. Фиксируем положительное бесконечно малое ε. Для любого стандартного $y \in \mathcal{Y}$ $\quad\sigma$-конечная мера λ_y стандартна, и из теоремы 2 следует существование конечного набора X_y элементов $\mathcal{X}$ и положительного $\Delta_y \in \mathbb{R}$ таких, что $\left| \int f\, d\lambda_y - \Delta_y \sum\limits_{X_y} f \right| \leqslant \varepsilon$ для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$.

Продолжим функции $X : {}^\circ\mathcal{Y} \to \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^n$ и $\Delta : {}^\circ\mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ до внутренних функций $X : \mathcal{Y} \to \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^n$ и $\Delta : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ и обозначим внутреннюю формулу $\left| \int f\, d\lambda_y - \Delta_y \sum\limits_{X_y} f \right| \leqslant \varepsilon$ через $\Phi(y, f)$. Обозначим теперь внутреннее множество $\{f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \,|\, \Phi(y, f)\}$ через F_y. Тогда ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset F_y$ для каждого стандартного $y \in \mathcal{Y}$. По лемме 5 найдется внутреннее $\mathcal{F}$ такое, что ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F} \subset \bigcap\limits_{y \in {}^\circ\mathcal{Y}} F_y$, в частности $\forall^{\mathrm{st}} y \in \mathcal{Y}\ \forall f \in \mathcal{F}\ \Phi(y, f)$.

Положим $Y_\circ = \{y \in \mathcal{Y} | \forall f \in \mathcal{F}\ \Phi(y, f)\}$. Это внутреннее множество, причем ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y_\circ$. Известно, что найдется внутреннее конечное множество $\widetilde{\mathcal{Y}}$ такое, что ${}^\circ\mathcal{Y} \subset \widetilde{\mathcal{Y}} \subset$

$\mathcal{Y}$. Положим $Y_1 = Y_\circ \cap \widetilde{\mathcal{Y}}$. Тогда Y_1 — конечное внутреннее множество и $\forall y \in Y_1$ $\forall f \in \mathcal{F}\ \Phi(y,f)$, но так как ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F}$, то $\forall y \in Y_1\ \forall^{\mathrm{st}} f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})\ \Phi(y,f)$.

Возьмем в качестве Y любой набор $(y_1,\dots,y_M)$, составленный из всех элементов Y_1, а в качестве X — конкатенацию наборов $X_{y_1} \oplus X_{y_2} \oplus \ldots \oplus X_{y_M}$, т. е. набор, образованный стоящими подряд элементами наборов $X_{y_1}, X_{y_2}, \dots, X_{y_M}$. Пусть $X = (x_1,\dots,x_N)$. Положим

$$\Lambda_{nm} = \begin{cases} \Delta_{y_m}, & \text{когда } \sum\limits_{j=1}^{m-1} N_j < n \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} N_j, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где N_j — длина набора X_{y_j}. Тогда для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$

$$\left| \int f\, d\lambda_{y_j} - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Lambda_{ij} \right| = \left| \int f\, d\lambda_{y_j} - \sum_{X_{y_j}} f \cdot \Delta_{y_j} \right| \leqslant \varepsilon \quad (j = 1,\dots,M),$$

т. е. $\int\limits_{\mathcal{X}} f\, d\lambda_{y_j} \approx \sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i)\Lambda_{ij}$. □

Рассмотрим частный случай псевдоинтегрального оператора — интегральный оператор. Пусть в условиях теоремы 6 на σ-алгебре $\mathcal{A}$ задана σ-конечная мера μ и для каждого $y \in \mathcal{Y}$ мера λ_y абсолютно непрерывна относительно μ с плотностью $K : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$, причем для каждого $y \in \mathcal{Y}$ функция $K_y = K(\,\cdot\,, y)$ принадлежит $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда псевдоинтегральный оператор превращается в интегральный:

$$T : \mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}(\mathcal{Y}), \qquad (Tf)(y) = \int\limits_{\mathcal{X}} f\, d\lambda_y = \int\limits_{\mathcal{X}} f \cdot K_y\, d\mu.$$

Зафиксируем положительное бесконечно малое ε. Теорема 2 обеспечивает существование конечного набора $X = (x_1,\dots,x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и положительного $\Delta \in \mathbb{R}$ таких, что для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f\, d\mu - \Delta \sum_{X} f \right| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 7. *Дискретизация интегрального оператора. Существуют конечный набор $Y = (y_1,\dots,y_M)$ элементов $\mathcal{Y}$, причем ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y$, и матрица Λ такие, что $\Lambda_{ij} = \Delta \cdot K(x_i, y_j)$ и $\pi_Y(Tf) \approx \Lambda \pi_X(f)$.*

Доказательство. Доказательство повторяет в основном доказательство теоремы 6. Пусть $y \in {}^\circ\mathcal{Y}$. Обозначим через $\Psi(y,f)$ внутреннюю формулу $\left| \int f\, d\lambda_y - \Delta \sum\limits_{X} f \cdot K_y \right| \leqslant$

ε. Из стандартности K_y следует, что для любой стандартной $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\lambda_y - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| = \left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \cdot K_y \, d\mu - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $F_y = \{f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \mid \Psi(y,f)\}$, тогда по лемме 5 найдется внутреннее $\mathcal{F}$ такое, что $\forall^{\mathrm{st}} y \in \mathcal{Y} \ \forall f \in \mathcal{F} \ \Psi(y,f)$ и ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F}$. В этом случае существует конечное внутреннее $Y_1 \subset \mathcal{Y}$ такое, что ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y_1$ и $\forall y \in Y_1 \ \forall f \in \mathcal{F} \ \Psi(y,f)$, но так как ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F}$, то $\forall y \in Y_1 \ \forall^{\mathrm{st}} f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \ \Psi(y,f)$. Если в качестве Y взять набор, составленный из всех элементов Y_1, то

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\lambda_{y_j} \approx \Delta \sum_X f \cdot K_{y_j} = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \Lambda_{ij} \quad (j = 1, \dots, M).$$

$\square$

Приведем несколько замечаний, уточняющих теоремы 6 и 7.

Замечание 8. Из доказательств теорем 6 и 7 следует более сильный результат, нежели сформулированный в условиях: для любого положительного бесконечно малого ε существуют X, Y, Λ, описанные в условиях теорем 6, 7, такие, что для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\lambda_{y_j} - \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \Lambda_{ij} \right| \leqslant \varepsilon \qquad (j = 1, \dots, M).$$

Замечание 9. Из доказательств теорем 6, 7 следует также, что построенный там внутренний конечный набор Y содержит стандартное ядро $\mathcal{Y}$, а значит, наследует многие его свойства. Например, $\sup\limits_{y \in \mathcal{Y}} F(y) = {}^\circ \sup\limits_{j=1,\dots,M} F(y_j) = {}^\circ \max \pi_Y(F)$ для стандартной ограниченной функции $F : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

Замечание 10. Проектор π_X в теореме 7 сохраняет L_1-норму для стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\mu = {}^\circ\!\left(\Delta \sum_X f \right) = {}^\circ \left(\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N} (\pi_X(f))_i \right).$$

Замечание 11. Потребовав в теореме 7 абсолютную непрерывность всех λ_y относительно μ, мы получили более “явное” построение X и Λ, чем в теореме 6, а именно: X аппроксимирует меру μ, а Λ является матрицей значений $\Delta \cdot K$ на конечной сетке $X \times Y$.

Если ввести в $\mathbb{R}^M$ max-норму $\| \; v \; \| = \max\limits_{j=1,\ldots,M} |v_j|$, то полученный в ходе доказательства теоремы 7 результат можно записать следующим образом: для любой пары (X, Δ), аппроксимирующей меру μ с точностью до ε, найдется конечный набор $Y = (y_1, \ldots, y_M)$ такой, что ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y$ и $\| \; \pi_Y(Tf) - \Lambda\pi_X(f) \; \| \leqslant \varepsilon$.

Теорема 12. *Для любого конечного набора $Y = (y_1, \ldots, y_M)$ элементов $\mathcal{Y}$ найдется пара (X, Δ), аппроксимирующая меру μ, такая, что $\| \; \pi_Y(Tf) - \Lambda\pi_X(f) \; \| \leqslant \varepsilon$ для любой $f \in {}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ (матрица Λ определяется так же, как и в теореме 7).*

Доказательство. Доказательство. Для любого $y \in Y$ функция K_y принадлежит множеству $\{K_{y_1}, \ldots, K_{y_M}\}$ и, следовательно, Y-стандартна. Пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ стандартно, а значит, и Y-стандартно. Следствие 4 обеспечивает существование конечного набора X и положительного Δ таких, что для любой Y-стандартной интегрируемой функции g

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} g \, d\mu - \Delta \sum_X g \right| \leqslant \varepsilon.$$

Если $f \in {}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X})$, то $f \cdot K_y$ является Y-стандартной интегрируемой функцией, поэтому

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\lambda_y - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| = \left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \cdot K_y \, d\mu - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| \leqslant \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. $\square$

2. Случайная мера Леба

Определение 13. Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{A},)$ — пространство $\mathcal{X}$ с алгеброй $\mathcal{A}$ его подмножеств, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ — пространство $\mathcal{Y}$ с алгеброй $\mathcal{B}$ и конечно-аддитивной мерой ν. *Случайной (конечно-аддитивной) мерой на $\mathcal{A} \times \mathcal{Y}$* называется функция $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ такая, что

1) для любого $A \in \mathcal{A}$ функция $\lambda_A = \lambda(A, \cdot) : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$-измерима;

2) существует подмножество $\overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}$ полной меры ν такое, что для любого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ функция $\lambda_y = \lambda(\cdot, y)$ является (конечно-аддитивной) мерой на $\mathcal{A}$.

Чтобы подчеркнуть, что $\mathcal{Y}$ рассматривается с алгеброй $\mathcal{B}$, будем писать $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$.

Пусть далее $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ и случайная конечно-аддитивная мера λ внутренние. Построим меру Леба $\nu_L : L(\mathcal{B}, \nu) \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$ для меры ν. Будем в дальнейшем писать $L(\mathcal{B})$ вместо $L(\mathcal{B}, \nu)$.

Для каждого элемента $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ для меры λ_y построим меру Леба $(\lambda_y)_L : L(\mathcal{A}, \lambda_y) \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$. Обозначим через $\sigma(\mathcal{A})$ наименьшую внешнюю σ-алгебру, содержащую алгебру $\mathcal{A}$. По построению меры Леба $\sigma(\mathcal{A}) \subset L(\mathcal{A}, \lambda_y)$ для каждого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$.

Определим функцию $\lambda^L : \sigma(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y} \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$ следующим образом: для каждого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ и $A \in \sigma(\mathcal{A})$ положим $\lambda^L(A, y) = (\lambda_y)_L(A)$, на $\mathcal{Y} \setminus \overline{\mathcal{Y}}$ доопределим λ^L произвольно.

Теорема 14. *случайная мера Леба. Построенная выше функция λ^L является внешней случайной мерой $\lambda^L : \sigma(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y}_{L(\mathcal{B})} \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Доказательство. Прежде всего, заметим, что $\lambda^L_y = (\lambda_y)_L$ и $\nu_L(\mathcal{Y} \setminus \overline{\mathcal{Y}})$, откуда следует, что λ^L_y является мерой для ν_L-почти всех $y \in \mathcal{Y}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество таких $A \in \sigma(\mathcal{A})$, для которых функция λ^L_A $L(\mathcal{B})$-измерима.

Пусть $A \in \mathcal{A}$, тогда $\lambda^L_A(y) = \lambda^L_y(A) = {}^\circ\lambda_y(A) = {}^\circ\lambda_A(y)$ для любого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$. Следовательно, λ_A есть поднятие λ^L_A, но так как функция λ_A $\mathcal{B}$-измерима, по теореме о поднятии (см. [3]) функция λ^L_A $L(\mathcal{B})$-измерима, т. е. $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$. (Теорема о поднятии сформулирована в [3] только для конечной меры, но приведенное там ее доказательство в нужную нам сторону проходит и для бесконечной меры).

Пусть теперь $(A_n)_{n \in {}^\circ\mathbb{N}}$ — монотонная последовательность множеств из $\mathfrak{M}$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Тогда $A \in \sigma(\mathcal{A})$, но в силу того, что $\lambda^L_y(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda^L_y(A_n)$ для любого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$, функция λ^L_A $L(\mathcal{B})$-измерима как предел последовательности $L(\mathcal{B})$-измеримых функций $(\lambda^L_{A_n})_{n \in {}^\circ\mathbb{N}}$. Тем самым $\mathfrak{M}$ — монотонный класс. Так как любой монотонный класс, содержащий алгебру, содержит и порожденную ей σ-алгебру (см. [4]), то $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}$. Но по построению $\mathfrak{M} \subset \sigma(\mathcal{A})$, откуда и следует требуемое. $\square$

Мы сознательно рассматриваем λ^L только на $\sigma(\mathcal{A})$. Предположим, алгебры $L(\mathcal{A}, \lambda_y)$ совпадают для всех $y \in \mathcal{Y}$, обозначим такую алгебру через $L(\mathcal{A})$. Даже в этом случае функция $\lambda^L : L(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y}_{L(\mathcal{B})} \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$ может не быть случайной мерой.

Пример 15. Зафиксируем бесконечно большое натуральное число η, и пусть $\Delta t = \eta^{-1}$, $\mathcal{Y} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, \eta \cdot \Delta t = 1\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}^{\mathrm{Int}}(\mathcal{Y})$ — алгебра всех внутренних подмножеств $\mathcal{Y}$. Пусть ν — считающая мера на $\mathcal{Y}$, т. е. $\nu(A) = |A|/|Y|$ для любого внутреннего $A \subset \mathcal{Y}$, где $|A|$ — число элементов A. Как показано в [3], алгебра измеримых по Лебу множеств $L(\mathcal{B}, \nu)$ в этом случае не совпадает с $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Зафиксируем ν_L-неизмеримое множество N.

Положим $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}^{\mathrm{Int}}(\mathcal{Y})$, и пусть для $y \in \mathcal{Y}$, $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A, y) = \chi_A(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция λ является случайной мерой $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$.

Легко заметить, что для каждого $y \in \mathcal{Y}$ алгебра $L(\mathcal{A}, \lambda_y)$ совпадает с $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$, откуда $N \in L(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Но функция $\lambda^L_N = \chi_N \quad L(\mathcal{B})$-неизмерима, т. е. $\lambda^L : L(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y} \to {}^\circ\mathbb{R}$ не является случайной мерой.

Пусть $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ — пространство классов почти всюду равных измеримых функций, действующих из $\mathcal{Y}$ в $\mathbb{R}$, а $M(\mathcal{Y}, L(\mathcal{B}), \nu_L)$ — пространство классов ν_L-почти всюду равных ν_L-почти всюду конечных $L(\mathcal{B})$-измеримых функций, действующих из $\mathcal{Y}$ в ${}^\circ\overline{\mathbb{R}}$. Будем далее считать, что мера ν конечна. Как обычно, мы иногда будем отождествлять классы и функции.

Пусть $\mathcal{N}_\approx$ — порядковый идеал в $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$, состоящий из функций, примерно равных нулю, за исключением множества ν_L-меры 0:

$$\mathcal{N}_\approx = \{\widetilde{F} \in M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu) \mid (\forall F \in \widetilde{F})(\exists N)((\nu_L(N) = 0) and ((\forall y \notin N) F(y) \approx 0))\}.$$

Обозначим $\widetilde{F}/\mathcal{N}_\approx$ элемент фактор-пространства $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)/\mathcal{N}_\approx$, соответствующий $\widetilde{F} \in M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$. Из теоремы о поднятии вытекает

Лемма 16. *Для $\widetilde{F}/\mathcal{N}_\approx$ положим $\varphi(\widetilde{F}/\mathcal{N}_\approx) = {}^\circ\widetilde{F}$. Тогда φ является линейным изоморфизмом $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)/\mathcal{N}_\approx$ на $M(\mathcal{Y}, L(\mathcal{B}), \nu_L)$.*

Фактор-пространство $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$, рассматриваемое как векторное пространство над ${}^\circ\mathbb{R}$ по подпространству $\mathcal{N}_\approx$, является аналогом нестандартной оболочки нормированного пространства (см., например, [5]), где в качестве подпространства взята совокупность элементов бесконечно малой нормы. Если бы вместо $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)/\mathcal{N}_\approx$ мы взяли оболочку $\operatorname{fin} M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ по полунорме $\| F \| = \operatorname{ess\,sup}_\nu |F|$, то отображение φ было бы лишь эпиморфизмом. Если взять, к примеру, меру Лебега на отрезке [0,1], то функциям $F_1 \equiv 0$ и $F_2 = \chi_{[0,\varepsilon]}$, где ε — положительное бесконечно малое, в оболочке будут соответствовать разные классы, однако φ переводит обе эти функции в нуль.

Пусть V — внутреннее векторное пространство, $\mathcal{N} \subset V^\approx$ — его внешние подпространства. Будем называть *нестандартной оболочкой* V и обозначать символом $\widehat{V}$ фактор-пространство $V^\approx/\mathcal{N}$. Для $v \in V^\approx$ через $\hat{v}$ будем обозначать соответствующий класс в $\widehat{V}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — внутренняя алгебра подмножеств $\mathcal{X}$, $\quad F : \mathcal{A} \to V$ — внутренняя конечно-аддитивная векторная мера, причем $\operatorname{im} F \subset V^\approx$. Определим ${}^\circ F : \mathcal{A} \to \widehat{V}$ по правилу ${}^\circ F(A) = \widehat{F(A)}$. Естественно определить векторную меру Леба $L(F)$:

$L(\mathcal{A}, F) \to \widehat{V}$ как пополнение продолжения меры ${}^{\circ}F$ на $\sigma(\mathcal{A})$, если такое продолжение существует. Однако вопрос существования продолжения достаточно сложен.

Заметим, что в рассмотренном выше случае $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)/\mathcal{N}_{\approx}$ является нестандартной оболочкой $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ по идеалу $\mathcal{N}_{\approx}$, причем в качестве $(M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu))^{\approx}$ взято само пространство $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$.

В связи с описанными выше случайными мерами $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ и $\lambda^L : \sigma(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y}_{L(\mathcal{B})} \to {}^{\circ}\overline{\mathbb{R}}$ рассмотрим векторные меры $\widetilde{\lambda} : \mathcal{A} \to M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ и $\widetilde{\lambda}^L : \sigma(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{Y}, L(\mathcal{B}), \nu_L)$, определенные по правилу $\widetilde{\lambda}(A) = \lambda_A$, $\widetilde{\lambda}^L(A) = \lambda^L_A$.

Теорема 17. *Для векторной меры $\widetilde{\lambda}$ существует мера Леба $L(\widetilde{\lambda})$, причем на $\sigma(\mathcal{A})$ она совпадает с $\widetilde{\lambda}^L$ с точностью до фигурирующего в лемме 16 изоморфизма φ.*

Доказательство. Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}$, тогда $\varphi({}^{\circ}\widetilde{\lambda}(A)) = \varphi(\widehat{\widetilde{\lambda}(A)}) = {}^{\circ}(\widetilde{\lambda}(A)) = {}^{\circ}\lambda_A = \lambda^L_A = \widetilde{\lambda}^L(A)$, т. е. на $\mathcal{A}$ меры $(\varphi \circ {}^{\circ}\widetilde{\lambda})$ и $\widetilde{\lambda}^L$ совпадают. Отсюда следует, что $\widetilde{\lambda}^L$ и дает искомое продолжение ${}^{\circ}\widetilde{\lambda}$ на $\sigma(\mathcal{A})$ с точностью до изоморфизма φ. □

С рассмотренными здесь проблемами автора познакомил А. Г. Кусраев. Автор весьма признателен также А. Е. Гутману и Е. И. Гордону за множество ценных советов и замечаний.

Литература

[1] Гордон Е. И. О мерах Леба // Изв. вузов. Математика. 1991, № 2. С. 25–33.

[2] Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 89–95.

[3] Gutland N. J. Nonstandard measure theory and its applications // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15. P. 529–587.

[4] Halmos P. R. Measure theory. N.-Y.: Springer-Verlag, 1974.

[5] Henson C. W., Moore L. C. Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard Analysis: Recent Development /Lecture Notes in Math. 1983, N 983.