ГОСКОМИТЕТ РОССИИ ПО НАУКЕ И ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра математического анализа

ТРОИЦКИЙ Владимир Георгиевич

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ НЕСТАНДАРТНОЙ ТЕОРИИ МЕРЫ

Научные руководители:

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института математики СО РАН ГУТМАН Александр Ефимович

Доктор физико-математических наук, начальник отдела функционального анализа Института математики СО РАН КУТАТЕЛАДЗЕ Семен Самсонович

Новосибирск – 1993

Введение

Данная работа представляет собой исследование некоторых разделов нестандартной теории меры, которая является одной из наиболее удачных областей применения нестандартного анализа. Исключение составляет лишь четвертая часть, содержащяя результаты относящиеся к классической теории меры.

В первой части проводится дискретизация псевдоинтегрального оператора, использующая полученную Е. И. Гордоном в [1] дискретизацию интеграла. Основной результат заключается в том, что, заменяя функции векторами, составленными из их значений в конечном (но бесконечно большом) числе точек, можно с точностью до бесконечно малого аппроксимировать псевдоинтегральный оператор матрицей бесконечно большого размера. При этом для случая интегрального оператора показано, что матрица аппроксимирующего гиперконечного оператора строится как таблица значений ядра исходного оператора в узлах некоторой сетки. Ранее аналогичные результаты были получены лишь для преобразования Фурье и некоторых связанных с ним операторов, а также для операторов Гильберта–Шмидта ([2,3]).

Важным шагом в развитии нестандартной теории меры явилось появление меры Леба, введенной П. Лебом в работе [4]. Позже аналогичная конструкция была построена для мер со значениями в нормированном пространстве (см., например, [5]). Во второй части представленной работы построена конструкция меры Леба для случайной меры. Доказывается, что получится тот же объект, если рассматривать случайную меру как векторную, со значениями в пространстве измеримых функций, и строить для нее меру Леба как для векторной меры. О нетривиальности задачи свидетельствует установленный в работе факт, что внутреннюю случайную меру можно продолжить лишь на σ-алгебру, порожденную внутренней алгеброй множеств, а не на всю алгебру Леба.

Третья часть посвящена исследованию случайных элементов в произведениях пространств с мерой. В работе [6] Ф. Ваттенбергом было введено понятие случайного элемента. Е. И. Гордон ввел понятие относительно случайного элемента (см. [7]) и показал, что если первая координата точки в произведении двух пространств случайна, а вторая случайна относительно первой, то такая точка случайна в произведении пространств с мерой. В третьей части даной работы исследован обратный вопрос: когда координаты точки, случайной в произведении пространств, случайны друг относительно друга.

В четвертой части приведены некоторые результаты, относящиеся к классической теории меры. В частности, получено достаточное условие существования сохраняющего меру эпиморфизма из пространства с мерой на единичный отрезок с мерой Лебега. На достаточно широком классе пространств с мерей введена некоторая вещественая структура.

Пятая часть посвящена исследованию свойств и структуры бесконечно мелких разбиений измеримых пространств, рассмотренных П. Лебом в [8]. Установлены некоторые характеризации мер и измеримых функций по их значениям на элементах разбиения.

Результаты, приведенные в первой, второй и четвертой частях, будут опубликованы в третьем номере Сибирского Математического Журнала за 1993 год. В декабре 1992 года материалы четвертой части также представлены автором в Сибирский Математический Журнал.

Изложение ведется на языке теории внутренних множеств Е. Нельсона IST (см., например, [9]), однако все рассуждения верны и в рамках классического робинсоновского нестандартного анализа. По умолчанию рассматриваемые объекты предполагаются внутренними. Для стандартного множества A будем обозначать через ${}^\circ A$ стандартное ядро A, т. е. совокупность всех его стандартных элементов. Будем также использовать принятые сокращения: $(\exists^{\mathrm{st}} x \quad \Phi) = (\exists x \quad \mathrm{St}(x) \& \Phi)$, $(\forall^{\mathrm{st}} x \quad \Phi) = (\forall x \quad \mathrm{St}(x) \to \Phi)$, $(\exists^{\mathrm{fin}} x \quad \Phi) = (\exists x \quad x\text{-конечно} \& \Phi)$, $|A|$ = мощность множества A.

Автор весьма признателен А. Е. Гутману, Е. И. Гордону, А. Г. Кусраеву и А. С. Малюгину за множество советов и замечаний.

1. Дискретизация интегрального оператора

В работе [1] доказана

Теорема 1.1. *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой. Тогда найдутся конечный набор $X = (x_1, \dots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и положительное число Δ такие, что для любой стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\mu = {}^\circ\Big(\Delta \sum_X f\Big),$$

где $\sum\limits_X f$ означает $\sum\limits_{i=1}^N f(x_i)$.

Однако нам понадобится несколько более сильный результат:

Теорема 1.2. *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — стандартное пространство с σ-конечной мерой. Тогда для любого бесконечно малого положительного ε найдутся конечный набор $X = (x_1, \dots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и положительное число Δ такие, что для любой стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\mu - \Delta \sum_X f \right| \leqslant \varepsilon.$$

В этом случае будем говорить, что *пара* (X, Δ) *аппроксимирует меру* μ с точностью до ε.

Для конечной меры теорема 2 получена Е. И. Гордоном в работе [1] в ходе доказательства теоремы 1. Доказательство теоремы 2 в случае σ-конечной меры можно получить, несколько модифицировав это доказательство. Нам потребуются некоторые определения и факты из статьи [7]. Произвольный элемент τ называется *допустимым*, если он является элементом какого-нибудь стандартного множества. Элемент ξ называется *стандартным относительно допустимого элемента τ (τ-стандартным)*, если существует стандартная функция f такая, что для любого $b \in \operatorname{dom} f$ множество $f(b)$ конечно, $\tau \in \operatorname{dom} f, \quad \xi \in f(\tau)$. В статье [7] показано, что принципы переноса и идеализации остаются справедливыми, если каждое вхождение предиката "X стандартно" заменить в них предикатом "X τ-стандартно" для любого фиксированного допустимого τ. Действительное число r называется *τ-бесконечно малым* ($r \overset{\tau}{\approx} 0$), если $|r| < t$ для любого положительного τ-стандартного t, и *τ-бесконечно большим*, если $r^{-1} \overset{\tau}{\approx} 0$.

Отсюда следует, что если последовательность $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ стандартна относительно τ, то $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = r$ в том и только в том случае, когда $r_N \overset{\tau}{\approx} r$ для любого τ-бесконечно большого N.

Для доказательства теоремы 2 нам также потребуется

Теорема 1.3 ([1])**.** *Пусть τ — допустимое множество, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — τ-стандартное пространство с вероятностной мерой. Тогда существует последовательность $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов $\mathcal{X}$ такая, что для любой τ-стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i).$$

Доказательство. Пусть $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стандартная последовательность измеримых подмножеств $\mathcal{X}$ такая, что $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}_{n+1}$, $\mu(\mathcal{X}_n) < \infty$ для всех n и $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_n$. Из равенства

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathcal{X}_n} f\,d\mu$$

и того, что последовательность $\Bigl(\int\limits_{\mathcal{X}_n} f\,d\mu\Bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ стандартна (а значит, и ε-стандартна), следует, что

$$\int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu \overset{\varepsilon}{\approx} \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu$$

для любого ε-бесконечно большого N. А поскольку число $\varepsilon/2$ ε-стан- дартно, то

$$\Bigl|\int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu - \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu\Bigr| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим пространство $(\mathcal{X}_N, \mathcal{A}_N, \mu_N)$, где $\mathcal{A}_N = \{A \cap \mathcal{X}_N | A \in \mathcal{A}\}$ и $\mu_N = \frac{1}{\mu(\mathcal{X}_N)}\mu\big|_{\mathcal{A}_N}$ — вероятностная мера. Это пространство, очевидно, N-стандартно, и по теореме 3 найдется такая внутренняя последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathcal{X}$, что для любой N-стандартной функции $g \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}_N, \mathcal{A}_N, \mu_N)$

$$\int\limits_{\mathcal{X}_N} g\,d\mu_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i),$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) = \int\limits_{\mathcal{X}_N} g\,d\mu.$$

Последовательность $\Bigl(\frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ (ξ, N)-стандартна. Поэтому если K — (ξ, N)-бесконечно большое число, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i) \overset{(\xi,N)}{\approx} \frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{K} \sum_{i=0}^{K-1} g(\xi_i).$$

Положим $X = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\Delta = \frac{\mu(\mathcal{X}_N)}{K}$. Тогда $\int\limits_{\mathcal{X}_N} g\,d\mu \overset{(\xi,N)}{\approx} \Delta \sum\limits_X g$. Поскольку функция f стандартна, а значит, и N-стандартна, а число $1/N$ является (ξ, N)-стандартным, то

$$\Bigl|\int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu - \Delta \sum_X f\Bigr| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Теперь, вспомнив, что число N — ε-бесконечно большое, получаем неравенство $1/N < \varepsilon/2$, откуда

$$\left|\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu - \Delta\sum_X f\right| \leqslant \left|\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu - \int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu\right| + \left|\int\limits_{\mathcal{X}_N} f\,d\mu - \Delta\sum_X f\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Поскольку в доказательстве теоремы 2 используются лишь принципы переноса и идеализации, справедливо

Следствие 1.4. *Пусть τ — допустимое множество, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — τ-стан дартное пространство с σ-конечной мерой. Тогда для любого положительного ε найдутся конечный набор $X = (x_1, \ldots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и положительное число Δ такие, что для любой τ-стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*

$$\left|\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu - \Delta\sum_X f\right| \leqslant \varepsilon.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая техническая

Лемма 1.5. *Пусть $\mathcal{Y}$,$\mathcal{L}$ — стандартные множества, $F : {}^\circ\mathcal{Y} \to \mathcal{P}^{Int}(\mathcal{L})$, где $\mathcal{P}^{Int}(\mathcal{L})$ обозначает совокупность всех внутренних подмножеств $\mathcal{L}$, и ${}^\circ\mathcal{L} \subset \bigcap\limits_{y\in{}^\circ\mathcal{Y}} F_y$. Тогда существует внутреннее множество $\mathcal{F}$ такое, что ${}^\circ\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \bigcap\limits_{y\in{}^\circ\mathcal{Y}} F_y$.*

Доказательство. Продолжим F до внутренней функции $F : \mathcal{Y} \to \mathcal{P}^{\mathrm{Int}}(\mathcal{L})$ (в теории IST такое продолжение обеспечивает принцип идеализации, в рамках же робинсоновского анализа потребуется α^+-насы- щенность, где α — мощность ${}^\circ\mathcal{Y}$). По условию $l \in F_y$ для любых $y \in {}^\circ\mathcal{Y}$ и $l \in {}^\circ\mathcal{L}$, т. е. для любой пары $(y, l) \in {}^\circ(\mathcal{Y} \times \mathcal{L})$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $(y_1, l_1), \ldots, (y_n, l_n) \in {}^\circ(\mathcal{Y} \times \mathcal{L})$. Тогда, положив $\mathcal{F} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{y_i}$, получаем $l_i \in \mathcal{F} \subset F_{y_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Отсюда согласно принципу идеализации (или принципу насыщения) следует существование внутреннего $\mathcal{F}$ такого, что $l \in \mathcal{F} \subset F_y$ для всех $(y, l) \in {}^\circ(\mathcal{Y} \times \mathcal{L})$, т. е. ${}^\circ\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \bigcap\limits_{y\in{}^\circ\mathcal{Y}} F_y$. □

Пусть теперь $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \lambda_y)_{y\in\mathcal{Y}}$ — стандартное семейство пространств с σ-конечными мерами, т. е. $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — стандартные множества, $\mathcal{A}$ — стандартная σ-алгебра подмножеств $\mathcal{X}$, и $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ — стандартная функция такая, что для каждого $y \in \mathcal{Y}$ функция $\lambda_y = \lambda(\cdot, y) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ является σ-конечной мерой на $\mathcal{X}$.

Введем обозначения: $\mathcal{F}(\mathcal{Y}) = \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$, $\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \,|\, f$ — λ_y-интегрируема для всех $y \in \mathcal{Y}\}$. Для конечного набора $X = (x_1, \ldots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ обозначим символом π_X “проектор” из $\mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ в $\mathbb{R}^N$, сопоставляющий функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ вектор $(f(x_1), \ldots , f(x_N))$. Аналогично для конечного набора $Y = (y_1, \ldots , y_M)$ элементов $\mathcal{Y}$ определим $\pi_Y : \mathcal{F}(\mathcal{Y}) \to \mathbb{R}^M$ по правилу $\pi_Y(F) = (F(y_1), \ldots , F(y_M))$. Обозначим через T псевдоинтегральный оператор, действующий из $\mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ в $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ следующим образом: $(Tf)(y) = \int\limits_{\mathcal{X}} f\, d\lambda_y$.

Теорема 1.6 (дискретизация псевдоинтегрального оператора)**.** *Существуют конечные наборы $X = (x_1, \ldots , x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и $Y = (y_1, \ldots , y_M)$ элементов $\mathcal{Y}$, причем ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y$, а также матрица Λ размера $N \times M$ такие, что для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ выполнено $\pi_Y(Tf) \approx \Lambda\pi_X(f)$, т. е. $\int f\, d\lambda_{y_j} \approx \sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i)\Lambda_{ij}$, $(j = 1, \ldots , M)$. Другими словами, диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_1(\mathcal{X}) & \xrightarrow{T} & \mathcal{F}(\mathcal{Y}) \\ {\scriptstyle \pi_X}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \pi_Y}\Big\downarrow \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\Lambda} & \mathbb{R}^M. \end{array}$$

коммутативна с точностью до бесконечно малого.

Доказательство. Фиксируем положительное бесконечно малое ε. Для любого стандартного $y \in \mathcal{Y}$ σ-конечная мера λ_y стандартна, и из теоремы 2 следует существование конечного набора X_y элементов $\mathcal{X}$ и положительного $\Delta_y \in \mathbb{R}$ таких, что $\left| \int f\, d\lambda_y - \Delta_y \sum\limits_{X_y} f \right| \leqslant \varepsilon$ для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$.

Продолжим функции $X : {}^\circ\mathcal{Y} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^n$ и $\Delta : {}^\circ\mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ до внутренних функций $X : \mathcal{Y} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^n$ и $\Delta : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ и обозначим внутреннюю формулу $\left| \int f\, d\lambda_y - \Delta_y \sum\limits_{X_y} f \right| \leqslant \varepsilon$ через $\Phi(y, f)$. Обозначим теперь внутреннее множество $\{f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \,|\, \Phi(y, f)\}$ через F_y. Тогда ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset F_y$ для каждого стандартного $y \in \mathcal{Y}$. По лемме 5 найдется внутреннее $\mathcal{F}$ такое, что ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F} \subset \bigcap\limits_{y\in{}^\circ\mathcal{Y}} F_y$, в частности $\forall^{\mathrm{st}} y \in \mathcal{Y}\ \forall f \in \mathcal{F}\ \Phi(y, f)$.

Положим $Y_\circ = \{y \in \mathcal{Y} | \forall f \in \mathcal{F}\ \Phi(y, f)\}$. Это внутреннее множество, причем ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y_\circ$. Известно, что найдется внутреннее конечное множество $\widetilde{\mathcal{Y}}$ такое, что ${}^\circ\mathcal{Y} \subset \widetilde{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}$. Положим $Y_1 = Y_\circ \cap \widetilde{\mathcal{Y}}$. Тогда Y_1 — конечное внутреннее множество и $\forall y \in Y_1$ $\forall f \in \mathcal{F}\ \Phi(y, f)$, но так как ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F}$, то $\forall y \in Y_1\ \forall^{\mathrm{st}} f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})\ \Phi(y, f)$.

Возьмем в качестве Y любой набор $(y_1, \ldots , y_M)$, составленный из всех элементов Y_1, а в качестве X — конкатенацию наборов $X_{y_1} \oplus X_{y_2} \oplus \ldots \oplus X_{y_M}$, т. е. набор, образованный стоящими подряд элементами наборов $X_{y_1}, X_{y_2}, \ldots , X_{y_M}$. Пусть $X =$

$(x_1, \dots, x_N)$. Положим

$$\Lambda_{nm} = \begin{cases} \Delta_{y_m}, & \text{когда } \sum\limits_{j=1}^{m-1} N_j < n \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} N_j; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где N_j — длина набора X_{y_j}. Тогда для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$

$$\left| \int f \, d\lambda_{y_j} - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Lambda_{ij} \right| = \left| \int f \, d\lambda_{y_j} - \sum_{X_{y_j}} f \cdot \Delta_{y_j} \right| \leqslant \varepsilon \quad (j = 1, \dots, M),$$

т. е. $\int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\lambda_{y_j} \approx \sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i)\Lambda_{ij}$. □

Рассмотрим частный случай псевдоинтегрального оператора — интегральный оператор. Пусть в условиях теоремы 6 на σ-алгебре $\mathcal{A}$ задана σ-конечная мера μ и для каждого $y \in \mathcal{Y}$ мера λ_y абсолютно непрерывна относительно μ с плотностью $K : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$, причем для каждого $y \in \mathcal{Y}$ функция $K_y = K(\,\cdot\,, y)$ принадлежит $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда псевдоинтегральный оператор превращается в интегральный:

$$T : \mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \to \mathcal{F}(\mathcal{Y}), \qquad (Tf)(y) = \int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\lambda_y = \int\limits_{\mathcal{X}} f \cdot K_y \, d\mu.$$

Зафиксируем положительное бесконечно малое ε. Теорема 2 обеспечивает существование конечного набора $X = (x_1, \dots, x_N)$ элементов $\mathcal{X}$ и положительного $\Delta \in \mathbb{R}$ таких, что для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\mu - \Delta \sum_{X} f \right| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 1.7. (дискретизация интегрального оператора). *Существуют конечный набор $Y = (y_1, \dots, y_M)$ элементов $\mathcal{Y}$, причем ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y$, и матрица Λ такие, что $\Lambda_{ij} = \Delta \cdot K(x_i, y_j)$ и $\pi_Y(Tf) \approx \Lambda\pi_X(f)$.*

Доказательство. повторяет в основном доказательство теоремы 6. Пусть $y \in {}^\circ\mathcal{Y}$. Обозначим через $\Psi(y, f)$ внутреннюю формулу $\left|\int f \, d\lambda_y - \Delta \sum\limits_{X} f \cdot K_y\right| \leqslant \varepsilon$. Из стандартности K_y следует, что для любой стандартной $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\lambda_y - \Delta \sum_{X} f \cdot K_y \right| = \left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \cdot K_y \, d\mu - \Delta \sum_{X} f \cdot K_y \right| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $F_y = \{f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \mid \Psi(y, f)\}$, тогда по лемме 5 найдется внутреннее $\mathcal{F}$ такое, что $\forall^{\mathrm{st}} y \in \mathcal{Y} \; \forall f \in \mathcal{F} \; \Psi(y, f)$ и ${}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F}$. В этом случае существует конечное внутреннее $Y_1 \subset \mathcal{Y}$ такое, что ${}^\circ\mathcal{Y} \subset Y_1$ и $\forall y \in Y_1 \; \forall f \in \mathcal{F} \; \Psi(y, f)$, но так как

${}^{\circ}\mathcal{L}_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{F}$, то $\forall y \in Y_1\ \forall^{\mathrm{st}} f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})\ \Psi(y,f)$. Если в качестве Y взять набор, составленный из всех элементов Y_1, то

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\lambda_{y_j} \approx \Delta \sum_X f \cdot K_{y_j} = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Lambda_{ij} \quad (j = 1, \dots, M).$$

□

Приведем несколько замечаний, уточняющих теоремы 6 и 7.

Замечание 1.8. Из доказательств теорем 6 и 7 следует более сильный результат, нежели сформулированный в условиях: для любого положительного бесконечно малого ε существуют X, Y, Λ, описанные в условиях теорем 6, 7, такие, что для любой стандартной функции $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X})$

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\lambda_{y_j} - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Lambda_{ij} \right| \leqslant \varepsilon \qquad (j = 1, \dots, M).$$

Замечание 1.9. Из доказательств теорем 6, 7 следует также, что построенный там внутренний конечный набор Y содержит стандартное ядро $\mathcal{Y}$, а значит, наследует многие его свойства. Например, $\sup\limits_{y\in\mathcal{Y}} F(y) = {}^{\circ}\sup\limits_{j=1,\dots,M} F(y_j) = {}^{\circ}\max \pi_Y(F)$ для стандартной ограниченной функции $F : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

Замечание 1.10. Проектор π_X в теореме 7 сохраняет L_1-норму для стандартной интегрируемой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$:

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu = {}^{\circ}\left(\Delta \sum_X f\right) = {}^{\circ}\left(\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N} (\pi_X(f))_i\right).$$

Замечание 1.11. Потребовав в теореме 7 абсолютную непрерывность всех λ_y относительно μ, мы получили более [[явное]] построение X и Λ, чем в теореме 6, а именно: X аппроксимирует меру μ, а Λ является матрицей значений $\Delta \cdot K$ на конечной сетке $X \times Y$.

Если ввести в $\mathbb{R}^M$ max-норму $\| v \| = \max\limits_{j=1,\dots,M} |v_j|$, то полученный в ходе доказательства теоремы 7 результат можно записать следующим образом: для любой пары (X, Δ), аппроксимирующей меру μ с точностью до ε, найдется конечный набор $Y = (y_1, \dots, y_M)$ такой, что ${}^{\circ}\mathcal{Y} \subset Y$ и $\| \pi_Y(Tf) - \Lambda \pi_X(f) \| \leqslant \varepsilon$.

Теорема 1.12. *Для любого конечного набора $Y = (y_1, \dots, y_M)$ элементов $\mathcal{Y}$ найдется пара (X, Δ), аппроксимирующая меру μ, такая, что $\| \pi_Y(Tf) - \Lambda\pi_X(f) \| \leqslant \varepsilon$ для любой $f \in {}^{\circ}\mathcal{L}_1(\mathcal{X})$ (матрица Λ определяется так же, как и в теореме 7).*

Доказательство. Для любого $y \in Y$ функция K_y принадлежит множеству $\{K_{y_1}, \dots, K_{y_M}\}$ и, следовательно, Y-стандартна. Пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ стандартно, а значит, и Y-стандартно. Следствие 4 обеспечивает существование конечного набора X и положительного Δ таких, что для любой Y-стандартной интегрируемой функции g

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} g\, d\mu - \Delta \sum_X g \right| \leqslant \varepsilon.$$

Если $f \in {}^\circ\mathcal{L}_1(\mathcal{X})$, то $f \cdot K_y$ является Y-стандартной интегрируемой функцией, поэтому

$$\left| \int\limits_{\mathcal{X}} f\, d\lambda_y - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| = \left| \int\limits_{\mathcal{X}} f \cdot K_y\, d\mu - \Delta \sum_X f \cdot K_y \right| \leqslant \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. □

2. Случайная мера Леба

Определение 2.1. Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{A},)$ — пространство $\mathcal{X}$ с алгеброй $\mathcal{A}$ его подмножеств, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ — пространство $\mathcal{Y}$ с алгеброй $\mathcal{B}$ и конечно-адди- тивной мерой ν. *Случайной (конечно-аддитивной) мерой на* $\mathcal{A} \times \mathcal{Y}$ называется функция $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ такая, что

1) для любого $A \in \mathcal{A}$ функция $\lambda_A = \lambda(A, \cdot) : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$-измерима;

2) существует подмножество $\overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}$ полной меры ν такое, что для любого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ функция $\lambda_y = \lambda(\cdot, y)$ является (конечно-аддитивной) мерой на $\mathcal{A}$.

Чтобы подчеркнуть, что $\mathcal{Y}$ рассматривается с алгеброй $\mathcal{B}$, будем писать $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$.

Пусть далее $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ и случайная конечно-аддитивная мера λ внутренние. Построим меру Леба $\nu_L : L(\mathcal{B}, \nu) \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$ для меры ν. Будем в дальнейшем писать $L(\mathcal{B})$ вместо $L(\mathcal{B}, \nu)$.

Для каждого элемента $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ для меры λ_y построим меру Леба $(\lambda_y)_L : L(\mathcal{A}, \lambda_y) \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$. Обозначим через $\sigma(\mathcal{A})$ наименьшую внешнюю σ-алгебру, содержащую алгебру $\mathcal{A}$. По построению меры Леба $\sigma(\mathcal{A}) \subset L(\mathcal{A}, \lambda_y)$ для каждого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$.

Определим функцию $\lambda^L : \sigma(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y} \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$ следующим образом: для каждого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ и $A \in \sigma(\mathcal{A})$ положим $\lambda^L(A, y) = (\lambda_y)_L(A)$, на $\mathcal{Y} \setminus \overline{\mathcal{Y}}$ доопределим λ^L произвольно.

Теорема 2.2 (случайная мера Леба)**.** *Построенная выше функция* λ^L *является внешней случайной мерой* $\lambda^L : \sigma(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y}_{L(\mathcal{B})} \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $\lambda_y^L = (\lambda_y)_L$ и $\nu_L(\mathcal{Y}\backslash\overline{\mathcal{Y}})$, откуда следует, что λ_y^L является мерой для ν_L-почти всех $y \in \mathcal{Y}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество таких $A \in \sigma(\mathcal{A})$, для которых функция $\lambda_A^L \quad L(\mathcal{B})$-измерима.

Пусть $A \in \mathcal{A}$, тогда $\lambda_A^L(y) = \lambda_y^L(A) = {}^\circ\lambda_y(A) = {}^\circ\lambda_A(y)$ для любого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$. Следовательно, λ_A есть поднятие λ_A^L, но так как функция λ_A $\mathcal{B}$-измерима, по теореме о поднятии (см. [10]) функция $\lambda_A^L \quad L(\mathcal{B})$-измерима, т. е. $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$. (Теорема о поднятии сформулирована в [10] только для конечной меры, но приведенное там ее доказательство в нужную нам сторону проходит и для бесконечной меры). □

Пусть теперь $(A_n)_{n\in{}^\circ\mathbb{N}}$ — монотонная последовательность множеств из $\mathfrak{M}$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Тогда $A \in \sigma(\mathcal{A})$, но в силу того, что $\lambda_y^L(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_y^L(A_n)$ для любого $y \in \overline{\mathcal{Y}}$, функция $\lambda_A^L \quad L(\mathcal{B})$-измерима как предел последовательности $L(\mathcal{B})$-измеримых функций $(\lambda_{A_n}^L)_{n\in{}^\circ\mathbb{N}}$. Тем самым $\mathfrak{M}$ — монотонный класс. Так как любой монотонный класс, содержащий алгебру, содержит и порожденную ей σ-алгебру (см. [11]), то $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}$. Но по построению $\mathfrak{M} \subset \sigma(\mathcal{A})$, откуда и следует требуемое.

Мы сознательно рассматриваем λ^L только на $\sigma(\mathcal{A})$. Предположим, алгебры $L(\mathcal{A}, \lambda_y)$ совпадают для всех $y \in \mathcal{Y}$, обозначим такую алгебру через $L(\mathcal{A})$. Даже в этом случае функция $\lambda^L : L(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y}_{L(\mathcal{B})} \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$ может не быть случайной мерой.

Пример 2.3. Зафиксируем бесконечно большое натуральное число η, и пусть $\Delta t = \eta^{-1}$, $\mathcal{Y} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, \eta \cdot \Delta t = 1\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}^{\mathrm{Int}}(\mathcal{Y})$ — алгебра всех внутренних подмножеств $\mathcal{Y}$. Пусть ν — считающая мера на $\mathcal{Y}$, т. е. $\nu(A) = |A|/|\mathcal{Y}|$ для любого внутреннего $A \subset \mathcal{Y}$, где $|A|$ — число элементов A. Как показано в [10], алгебра измеримых по Лебу множеств $L(\mathcal{B}, \nu)$ в этом случае не совпадает с $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Зафиксируем ν_L-неизмеримое множество N.

Положим $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}^{\mathrm{Int}}(\mathcal{Y})$, и пусть для $y \in \mathcal{Y}$, $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A, y) = \chi_A(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция λ является случайной мерой $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$.

Легко заметить, что для каждого $y \in \mathcal{Y}$ алгебра $L(\mathcal{A}, \lambda_y)$ совпадает с $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$, откуда $N \in L(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Но функция $\lambda_N^L = \chi_N \quad L(\mathcal{B})$-неизмерима, т. е. $\lambda^L : L(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y} \to {}^\circ\mathbb{R}$ не является случайной мерой.

Пусть $M(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ — пространство классов почти всюду равных измеримых функций, действующих из $\mathcal{Y}$ в $\mathbb{R}$, а $M(\mathcal{Y}, L(\mathcal{B}), \nu_L)$ — пространство классов ν_L-почти всюду равных ν_L-почти всюду конечных $L(\mathcal{B})$-измеримых функций, действующих из $\mathcal{Y}$ в $^\circ\overline{\mathbb{R}}$. Будем далее считать, что мера ν конечна. Как обычно, мы иногда будем отождествлять классы и функции.

Пусть $\mathcal{N}_\approx$ — порядковый идеал в $M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)$, состоящий из функций, примерно равных нулю, за исключением множества ν_L-меры 0:

$$\mathcal{N}_\approx = \{\widetilde{F} \in M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu) \mid (\forall F \in \widetilde{F})(\exists N)((\nu_L(N)=0)\,\&\,((\forall y \notin N)(F(y)\approx 0)))\}.$$

Обозначим $\widetilde{F}/\mathcal{N}_\approx$ элемент фактор-пространства $M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)/\mathcal{N}_\approx$, соответствующий $\widetilde{F} \in M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)$. Из теоремы о поднятии вытекает

Лемма 2.4. *Для $\widetilde{F}/\mathcal{N}_\approx \in M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)/\mathcal{N}_\approx$ положим $\varphi(\widetilde{F}/\mathcal{N}_\approx) = {}^\circ\widetilde{F}$. Тогда φ является линейным изоморфизмом $M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)/\mathcal{N}_\approx$ на $M(\mathcal{Y},L(\mathcal{B}),\nu_L)$.*

Фактор-пространство $M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)$, рассматриваемое как векторное пространство над $^\circ\mathbb{R}$, по подпространству $\mathcal{N}_\approx$, является аналогом нестандартной оболочки нормированного пространства (см., например, [12]), где в качестве подпространства взята совокупность элементов бесконечно малой нормы. Если бы мы взяли вместо $M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)/\mathcal{N}_\approx$ оболочку $\operatorname{fin} M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)$ по полунорме $\| F \| = \operatorname{ess}_\nu \sup |F|$, то отображение φ было бы лишь эпиморфизмом. Если взять, к примеру, меру Лебега на отрезке [0,1], то функциям $F_1 \equiv 0$ и $F_2 = \chi_{[0,\varepsilon]}$, где ε — положительное бесконечно малое, в оболочке будут соответствовать разные классы, однако φ переводит обе эти функции в нуль.

Пусть V — внутреннее векторное пространство, $\mathcal{N} \subset V^\approx$ — его внешние подпространства. Будем называть *нестандартной оболочкой* V и обозначать символом $\widehat{V}$ фактор-пространство $V^\approx/\mathcal{N}$. Для $v \in V^\approx$ через $\hat{v}$ будем обозначать соответствующий класс в $\widehat{V}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — внутренняя алгебра подмножеств $\mathcal{X}$, $F : \mathcal{A} \to V$ — внутренняя конечно-аддитивная векторная мера, причем $\operatorname{im} F \subset V^\approx$. Определим $^\circ F : \mathcal{A} \to \widehat{V}$ по правилу $^\circ F(A) = \widehat{F(A)}$. Естественно определить векторную меру Леба $L(F) : L(\mathcal{A},F) \to \widehat{V}$ как пополнение продолжения меры $^\circ F$ на $\sigma(\mathcal{A})$, если такое продолжение существует. Однако вопрос существования продолжения достаточно сложен.

Заметим, что в рассмотренном выше случае $M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)/\mathcal{N}_\approx$ является нестандартной оболочкой $M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)$ по идеалу $\mathcal{N}_\approx$, причем в качестве $(M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu))^\approx$ взято само пространство $M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)$.

В связи с описанными выше случайными мерами $\lambda : \mathcal{A} \times \mathcal{Y}_\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ и $\lambda^L : \sigma(\mathcal{A}) \times \mathcal{Y}_{L(\mathcal{B})} \to {}^\circ\overline{\mathbb{R}}$ рассмотрим векторные меры $\widetilde{\lambda} : \mathcal{A} \to M(\mathcal{Y},\mathcal{B},\nu)$ и $\widetilde{\lambda}^L : \sigma(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{Y},L(\mathcal{B}),\nu_L)$, определенные по правилу $\widetilde{\lambda}(A) = \lambda_A$, $\widetilde{\lambda}^L(A) = \lambda^L_A$.

Теорема 2.5. *Для векторной меры* $\widetilde{\lambda}$ *существует мера Леба* $L(\widetilde{\lambda})$*, причем на* $\sigma(\mathcal{A})$ *она совпадает с* $\widetilde{\lambda}^L$ *с точностью до фигурирующего в лемме 4 изоморфизма* φ*.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}$, тогда $\varphi(^\circ\widetilde{\lambda}(A)) = \varphi(\widehat{\widetilde{\lambda}(A)}) = {}^\circ(\widetilde{\lambda}(A)) = {}^\circ\lambda_A = \lambda^L_A = \widetilde{\lambda}^L(A)$, т. е. на $\mathcal{A}$ меры $(\varphi\circ{}^\circ\widetilde{\lambda})$ и $\widetilde{\lambda}^L$ совпадают. Отсюда следует, что $\widetilde{\lambda}^L$ и дает искомое продолжение $^\circ\widetilde{\lambda}$ на $\sigma(\mathcal{A})$ с точностью до изоморфизма φ. □

3. Случайные элементы в произведениях пространств с мерой

Определение 3.1. Пусть $X = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — стандартное пространство с мерой. Элемент $x \in \mathcal{X}$ называется *случайным* (*τ-случайным*) элементом X, если $x \notin N$ для любого стандартного (τ-стандартного) множества N нулевой меры.

Понятие случайного элемента было введено Ваттенбергом в работе [6], относително случайного элемента — в работе Гордона [7].

Далее везде будем считать, что $X = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ и $Y = (\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ — два стандартных пространства с мерой, $X \otimes Y = (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ — их произведение (где $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все [[прямоугольники]] со [[сторонами]] из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$). Будем обозначать символом E_x сечение множества $E \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ точкой $x \in \mathcal{X}$: $E_x = \{y \in \mathcal{Y} \,|\, (x, y) \in E\}$. Введем также обозначения: $\mathcal{N}_X = \{A \in \mathcal{A} \,|\, \mu(A) = 0\}$, $\mathcal{N}_Y = \{B \in \mathcal{B} \,|\, \nu(B) = 0\}$, $\mathcal{N}_{X \otimes Y} = \{F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \,|\, (\mu \otimes \nu)(F) = 0\}$, $\widetilde{\mathcal{N}} = \{E \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \,|\, \forall x \in \mathcal{X} \quad E_x \in \mathcal{N}_Y\}$.

Е. И. Гордон доказал следующий факт:

Теорема 3.2. *Если* x_0 *— случайный элементв* X*, а* y_0 *является* x_0*-случайным элементом в* Y*, то пара* (x_0, y_0) *случайна в* $X \otimes Y$*.*

В связи с этим результатом Гордоном была поставлена следующая проблема: верно ли утверждение, обратное теореме 2?

Определение 3.3. Будем говорить, что пара пространств с мерой (X, Y) удовлетворяет *обратному условию Гордона*, если для любой случайной в $X \otimes Y$ пары (x, y) верно, что точка y $\;x$-случайна.

Определение 3.4. Будем говорить, что пара (X, Y) *графически измерима*, если $(\forall E \in \widetilde{\mathcal{N}})(\exists F \in \mathcal{N}_{X \otimes Y})(E \subset F)$.

Лемма 3.5. *Точка* y_0 x_0*-случайна тогда и только тогда, когда* $(\forall^{st} E \in \widetilde{\mathcal{N}})(y_0 \notin E_{x_0})$*.*

Доказательство. Предположим, y_0 x_0-неслучайна. Это значит, что найдется множество B и стандартная функция f такие, что $x_0 \in \operatorname{dom} f$, множество $f(z)$ конечно для всякого $z \in \operatorname{dom} f$ и $y_0 \in B \in f(x_0) \cap \mathcal{N}_Y$.

Построим новую стандартную функцию $g : \mathcal{X} \to \mathcal{N}_Y$

$$g(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } x \notin \operatorname{dom} f, \\ \bigcup(f(x) \cap \mathcal{N}_Y) & \text{— объединение всех множеств нулевой меры } \nu, \\ & \text{попавших в } f(x). \end{cases}$$

Поскольку множество $f(x)$ — конечно, то $g(x) \in \mathcal{N}_Y$ для всех $x \in \mathcal{X}$. Очевидно, $y_0 \in g(x_0)$, поэтому $y_0 \in E_{x_0}$, где $E = \{(x, y) \mid y \in g(x)\} \in \widetilde{\mathcal{N}}$.

Наоборот, предположим, найдется такое стандартное $E \in \widetilde{\mathcal{N}}$, что $y_0 \in E_{x_0}$. Функция $f(x) = \{E_x\}$ стандартна, поэтому множество нулевой меры E_{x_0} x_0-стандартно, а значит, точка y_0 не является x_0-случайной. □

Теорема 3.6. *Пара (X, Y) удовлетворяет обратному условию Гордона тогда и только тогда, когда она графически измерима.*

Доказательство. Пусть пара (X, Y) удовлетворяет обратному условию Гордона. С учетом леммы 5 это утверждение можно записать в следующем виде

$$(\forall z \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})[((\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathcal{N}_{X \otimes Y})(z \notin F)) \to ((\forall^{\mathrm{st}} E \in \widetilde{\mathcal{N}})(z \notin E))].$$

Применив к этой формуле алгоритм Нельсона, получим:

$$(\forall \widetilde{E} : \mathcal{N}_{X \otimes Y} \to \widetilde{\mathcal{N}})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathcal{F} \subset \mathcal{N}_{X \otimes Y})(\forall x \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})(\exists F \in \mathcal{F})[(z \in \widetilde{E}(F)) \to (z \in F)].$$

Если в качестве функции $\widetilde{E}$ взять постоянную функцию $\widetilde{E} = E \in \widetilde{\mathcal{N}}$, то

$$(\forall E \in \widetilde{\mathcal{N}})(\exists^{\mathrm{fin}} \mathcal{F} \subset \mathcal{N}_{X \otimes Y})(E \subset \bigcup \mathcal{F}),$$

но, поскольку из конечности $\mathcal{F}$ следует $\bigcup \mathcal{F} \subset \mathcal{N}_{X \otimes Y}$, то

$$(\forall E \in \widetilde{\mathcal{N}})(\exists F \subset \mathcal{N}_{X \otimes Y})(E \subset F),$$

то есть пара (X, Y) графически измерима.

Обратно, пусть пара (X, Y) графически измерима, и (x, y) — случайный элемент $X \otimes Y$. Предположим, точка y не x-случайна. Тогда по лемме 5 $(\exists^{\mathrm{st}} E \in \widetilde{\mathcal{N}})(y \in E_x)$. Из графической измеримости пары (X, Y) следует существование такого стандартного $F \in \mathcal{N}_{X \otimes Y}$ что $E \subset F$. Итак, $(x, y) \in E \subset F \in {}^{\circ}\mathcal{N}_{X \otimes Y}$ что противоречит случайности пары (x, y). □

Пример 3.7. Пусть $\mathbf{Lb}$ и $\mathbf{Bo}$ - соответственно лебеговская и борелевская алгебры подмножеств отрезка [0,1], $\mathbf{m}$ - мера Лебега, $\mathbf{I} = ([0, 1], \mathbf{Lb}, \mathbf{m})$ и $\mathbf{B} = ([0, 1], \mathbf{Bo}, \mathbf{m})$.

Из приведенного в [13] примера (построенного В. Серпинским) множества на плоскости, имеющего с каждой прямой не более двух общих точек и неизмеримого по Лебегу, следует, что пары $(\mathbf{I}, \mathbf{I})$ и $(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ графически неизмеримы.

Предложение 3.8. *Пусть $X = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$, $Y = (\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ — два пространства с мерой, $\overline{X} = (\mathcal{X}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\nu})$ и $\overline{Y} = (\mathcal{Y}, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\nu})$ — их пополнения. Тогда из графической измеримость пары (X, Y) следует графическая измеримость пар $(\overline{X}, Y)$, $(X, \overline{Y})$ и $(\overline{X}, \overline{Y})$.*

Доказательство. этого факта не представляет сложности с учетом теоремы 2 и мы оставляем его читателю. □

Определение 3.9. Пространство с мерой $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ называется *безатомным*, если в любом измеримом множестве положительной меры найдется измеримое подмножество меньшей, но ненулевой меры:

$$(\forall A \in \mathcal{A})[(\mu(A) > 0) \to (\exists B \in \mathcal{A})((B \subset A) \,\&\, (\mu(A) > \mu(B) > 0))].$$

Пространство с мерой будем называть *поточечно безатомным*, если все одноточечные множества в нем измеримы и имеют нулевую меру.

Любой элемент, образующий одноточечный атом, очевидно, является случайным. Поэтому наиболее интересны с точки зрения изучения случайных элементов именно поточечно безатомные пространства.

Определение 3.10. *Польским* пространством называется пространство с мерой $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ где $\mathcal{X}$ — полное сепарабельное метрическое пространство, и $\mathcal{A}$ — его борелевская σ-алгебра.

Теорема 3.11 (Е. Шпильрайн-Марцевский,[14])**.** *Любое поточечно-безатомное вероятностное польское пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ изоморфно пространству $\mathbf{B} = ([0,1], \mathbf{B}o, \mathbf{m})$, то есть существует взаимно-однозначное с точностью до множеств нулевой меры отображение $T : \mathcal{X} \to [0,1]$ такое, что T и T^{-1} сохраняют меру.*

Теорема 3.12. *Если X_1 и X_2 — поточечно безатомные польские пространства, то пара (X_1, X_2) графически неизмерима.*

Доказательство. Достаточно доказать требуемое для стандартных X_1 и X_2. Итак, пусть $X_1 = (\mathcal{X}_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ и $X_2 = (\mathcal{X}_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ — стандартные поточечно безатомные польские пространства. Тогда для $i = 1, 2$ найдутся стандартные $\widetilde{\mathcal{X}}_i \in \mathcal{A}_i$ такие, что $0 < \mu(\widetilde{\mathcal{X}_i}) < \infty$. Рассмотрим пространства с мерой $\widetilde{X_1} = (\mathrm{Cl}\widetilde{\mathcal{X}_1}, \widetilde{\mathcal{A}_1}, \widetilde{\mu_1})$ и $\widetilde{X_2} = (\mathrm{Cl}\widetilde{\mathcal{X}_2}, \widetilde{\mathcal{A}_2}, \widetilde{\mu_2})$, где $\mathrm{Cl}\widetilde{\mathcal{X}_i}$ — замыкание множества $\widetilde{\mathcal{X}_i}$, $\widetilde{\mathcal{A}_i} = \{A \in \mathcal{A} \,|\, A \subset \widetilde{\mathcal{X}_i}\}$ и $\widetilde{\mu_i}(A) = \frac{\mu_i(A \cap \widetilde{\mathcal{X}_i})}{\mu_i(\widetilde{\mathcal{X}_i})}, \quad (i = 1, 2)$. Легко заметить, что $\widetilde{X_1}$ и $\widetilde{X_2}$ — поточечно безатомные вероятностные польские пространства. Из теоремы 11 и примера 7 вытекает, что пара $(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2})$ — графически неизмерима. Отсюда следует, что найдется случайный элемент (x_1, x_2) в произведении $\widetilde{X_1} \otimes \widetilde{X_2}$, но при этом точка x_2 не x_1-случайна. Случайность пары (x_1, x_2) влечет случайность самих точек x_1 и x_2 в пространствах $\widetilde{X_1}$ и $\widetilde{X_2}$, откуда $x_i \in \widetilde{\mathcal{X}_i} \quad (i = 1, 2)$. Предположим, $(x_1, x_2) \in F \in {}^\circ\mathcal{N}_{X_1 \otimes X_2}$. Но тогда $(x_1, x_2) \in F \cap (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2) \in {}^\circ\mathcal{N}_{\widetilde{X_1} \otimes \widetilde{X_2}}$ что противоречит случайности пары (x_1, x_2) в $\widetilde{X_1} \otimes \widetilde{X_2}$, откуда следует, что пара (x_1, x_2) случайна в $X_1 \otimes X_2$. Но, как легко заметить, из x_1-неслучайности точки x_2 в $\widetilde{X_2}$ следует, что она x_1-неслучайна и в X_2, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

4. Вещественные разбиения пространств с мерой

Определение 4.1. *Вещественным разбиением* вероятностного пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ будем называть такое его разбиение $(D_t)_{t \in [0,1]}$ что $\mu(A_t^-) = \mu(A_t^+) = t$ для всех $t \in [0, 1]$, где $A_t^- = \bigcup\limits_{s<t} D_s$, $A_t^+ = \bigcup\limits_{s \leqslant t} D_s$. Вещественное разбиение будем называть *невырожденным*, если для каждого $t \in [0, 1]$ множество D_t непусто.

Теорема 4.2. *В любом полном безатомном вероятностном пространстве найдется вещественное разбиение.*

Доказательство. Пусть $X = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — полное безатомное вероятностное пространство. Пусть $\mathcal{G}$ — множество цепей в $\mathcal{A}$ вида $(E_t)_{t \in T \subset [0,1]}$, таких, что $\mu(E_t) = t$ и $E_s \subset E_t$ при $s < t$. Введем в $\mathcal{G}$ естественное упорядочение, положив $(E_t^1)_{t \in T_1} \prec (E_t^2)_{t \in T_2}$ когда $T_1 \subset T_2$ и $\forall t \in T_1 \quad E_t^1 = E_t^2$. Тогда по лемме Цорна в $\mathcal{G}$ найдется максимальная цепь $(E_t)_{t \in T_0 \subset [0,1]}$.

Покажем, что $T_0 = [0, 1]$. Пусть $t_0 \in [0, 1] \setminus T_0$, и пусть $a = \sup\{t \in T_0 \,|\, t < t_0\}$, $b = \inf\{t \in T_0 \,|\, t > t_0\}$. Покажем, что $a, b \in T_0$. Пусть $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T_0$ — возрастающяя сходящяяся к a последовательность. Рассмотрим множество $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_{t_n}$. Очевидно, $A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = a$. Если $t \in T_0$ и $t < a$, то найдется такое n, что $t < t_n$, откуда $E_t \subset A$. Если же $t \in T_0$ и $t > a$ то все $E_{t_n} \subset E_t$, а значит, $A \subset E_t$. В силу максимальности $(E_t)_{t \in T_0}$, $a \in T_0$. Аналогично, $b \in T_0$. Допустим, $a < b$; тогда $\mu(E_b \setminus E_a) = b - a > 0$. Тогда, благодаря безатомности X, найдется такое $F \subset E_b \setminus E_a$, что $0 < \mu(F) < b - a$. Отсюда $E_a \subset E_a \cup F \subset E_b$, $\mu(E_a \cup F) = a + \mu(F) < b$, что противоречит максимальности $(E_t)_{t \in T_0}$. Итак, $T_0 = [0, 1]$.

Положим $A_t^+ = \bigcap\limits_{s>t} E_s$, $A_t^- = \bigcup\limits_{s<t} E_s$. Из полноты пространства и того факта, что внутренние и внешние (в смысле теории меры) меры A_t^- и A_t^+ совпадают и равны t, следует, что A_t^- и A_t^+ измеримы и мера их равна t.

Очевидно, при $t_1 < t_2$ выполнено $A_{t_1}^- \subset E_{t_1} \subset A_{t_1}^+ \subset A_{t_2}^- \subset E_{t_2} \subset A_{t_2}^+$. Положим $D_t = A_t^+ \setminus A_t^-$; тогда $D_{t_1} \cap D_{t_2} = \emptyset$. Покажем, что $A_t^- = \bigcup\limits_{s<t} D_t$. Для $x_0 \in A_t^-$ положим $t_0 = \inf\{t \,|\, x_0 \in E_t\}$ и покажем, что $x_0 \in D_{t_0}$. Если $t_0 < s < t$, то x_0 содержится в E_s и, следовательно, в $A_{t_0}^+$. Аналогично, $x_0 \notin A_{t_0}^-$, так как в противном случае нашлось бы такое $s < t_0$, что $x_0 \in E_s$. Следовательно, $x_0 \in A_{t_0}^+ \setminus A_{t_0}^- = D_{t_0}$. Итак, $A_t^- = \bigcup\limits_{s<t} D_s$, $A_t^+ = \bigcup\limits_{s\leqslant t} D_s$. Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что $A_0^- = \emptyset$, $A_1^+ = \mathcal{X}$. $\square$

Определение 4.3. Будем говорить, что пространство с мерой *содержит канторово множество*, если в нем найдется подмножество мощности континуум нулевой меры.

При помощи теоремы 2 можно значительно расширить класс пространств в теореме 3.11 заменив условие изоморфности более слабым:

Теорема 4.4. *Для любого полного безатомного вероятностного пространства, содержащего канторово множество, найдется эпиморфизм, т.е. сохраняющее меру отображение его на единичный отрезок с мерой Лебега.*

Доказательство. Пусть $X = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ — полное безатомное вероятностное пространство, и множество $C \in \mathcal{N}_X$ имеет мощность континуум. Наша задача — построить эпиморфизм $\varphi : X \to \mathbf{I}$, где $\mathbf{I} = ([0,1], \mathbf{L}b, \mathbf{m})$.

Пусть $C = \{c_t\}_{t\in[0,1]}$. Рассмотрим пространство $(\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus C$, $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \setminus C \,|\, A \in \mathcal{A}\}$, $\widetilde{\mu} = \mu\big|_{\widetilde{\mathcal{A}}}$. Это полное безатомное вероятностное пространство, поэтому по теореме 2 для него существует вещественное разбиение, то есть такое разбиение $(\widetilde{D_t})_{t\in[0,1]}$, что $\widetilde{\mu}(\widetilde{A_t^-}) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A_t^+}) = t$, где $\widetilde{A_t^-} = \bigcup\limits_{s<t} \widetilde{D_s}$, $\quad \widetilde{A_t^+} = \bigcup\limits_{s\leqslant t} \widetilde{D_s}$. Положим $D_t = \widetilde{D_t} \cup \{c_t\}$, $\quad A_t^- = \bigcup\limits_{s<t} D_s$, $\quad A_t^+ = \bigcup\limits_{s\leqslant t} D_s$. Из полноты X и того, что $\mu(C) = 0$, вытекает измеримость A_t^- и A_t^+, причем $\mu(A_t^-) = \mu(A_t^+) = t$. Тем самым $(D_t)_{t\in[0,1]}$ являетсмя невырожденным вещественным разбиением X.

Определим эпиморфизм $\varphi : \mathcal{X} \to [0,1]$ по правилу $\varphi\big|_{D_t} = t$. При этом $\varphi(A_t^-) = [0,t)$, $\quad \varphi(A_t^+) = [0,t]$. Поскольку отрезки вида $[0,t)$ и $[0,t]$ с определенной на них мерой, равной t, порождают борелевскую σ-алгебру с мерой Лебега, то φ^{-1} сохраняет меру Лебега борелевских подмножеств $[0,1]$. Из полноты X следует, что φ сохраняет меру и лебеговских подмножеств. $\square$

Следующее наблюдение принадлежит С.А.Малюгину:

Теорема 4.5. *Пусть* $X = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *— полное безатомное пространство с мерой. Если мощность* $\mathcal{X}$ *больше континуума то в* X *найдется канторово множество.*

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать, что X — вероятностное пространство, иначе можно взять в нем подмножество конечной меры. В этом случае по теореме 2 существует вещественное разбиение $(D_t)_{t\in[0,1]}$, причем $\mu(D_t) = t$ для всех $t \in [0, 1]$. Если бы мощность всех D_t была меньше континуума, то $|\mathcal{X}| = |\bigcup\limits_{t\in[0,1]} D_t| \leqslant \mathbf{c}$, что противоречит условию. Значит, найдется t_0 такое, что $|D_{t_0}| \geqslant \mathbf{c}$. В силу полноты меры любое континуальное подмножество D_{t_0} будет канторовым множеством в X. □

В качестве иллюстрации к теореме 4 приведем простое доказательство следующего утверждения:

Теорема 4.6. *В любом безатомном вероятностном пространстве найдется неизмеримое множество. (Этот факт неявно встречается в работе Улама [15].)*

Доказательство. Допустим, существует безатомное вероятностное пространство $X = (\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}), \mu)$. Из безатомности X следует поточечная безатомность. Поскольку на алгебре всех подмножеств множества мощности континуум нельзя определить поточечно безатомную меру (см. [15,16]), заключаем, что $|\mathcal{X}| > \mathbf{c}$. Тогда теоремы 4 и 5 обеспечивают существование эпиморфизма $\varphi : X \to \mathbf{I} = ([0, 1], \mathbf{L}b, \mathbf{m})$, причем множества $D_t = \varphi^{-1}(t)$ образуют невырожденное вещественное разбиение $\mathcal{X}$; обозначим его символом ξ. Рассмотрим σ-алгебры $\mathcal{L} = \varphi^{-1}(\mathbf{L}b) = \{\varphi^{-1}(A) \mid A \in \mathbf{L}b\}$, $\mathcal{P} = \varphi^{-1}(\mathcal{P}([0, 1])) = \{\varphi^{-1}(A) \mid A \subset [0, 1]\}$. Перейдем к фактор-алгебрам по разбиению ξ (понятие фактора по разбиению можно найти, например, в [17]). Очевидно, пространство $(\mathcal{X}_\xi, \mathcal{L}_\xi, \mu_\xi)$ изоморфно $\mathbf{I}$. Заметим, что $\mathcal{L}_\xi \subset \mathcal{P}(\mathcal{X}_\xi) = (\mathcal{P}(\mathcal{X}))_\xi$. Отсюда следует, что пространство $(\mathcal{X}_\xi, \mathcal{P}(\mathcal{X}_\xi), \mu_\xi)$ поточечно безатомно (т.к. $\mathcal{L}_\xi \subset \mathcal{P}(\mathcal{X}_\xi)$) и имеет мощность континуум. Полученное противоречие доказывает теорему. □

5. Бесконечно мелкие разбиения измеримых пространств

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ — стандартное измеримое пространство, т.е. $\mathcal{X}$ — стандартное множество, $\mathcal{A}$ — стандартная алгебра его подмножеств. Пусть Q — стоуновский компакт алгебры $\mathcal{A}$, точками которого являются ультрафильтры измеримых множеств, и ι —

канонический булев изоморфизм $\mathcal{A}$ на Clop$Q$ — алгебру открыто-замкнутых множеств Q, т.е. $\iota(A) = \{q \in Q \mid A \in q\}$. Все рассматриваемые далее меры по умолчанию предполагаются конечно-аддитивными.

Пусть P — внутреннее измеримое разбиение $\mathcal{X}$.

Определение 5.1. Будем называть P *бесконечно мелким разбиением* (*бмр*), если $\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathcal{A} \quad A = \bigcup\{p \in P \mid p \subset A\}$.

Как известно (см., например, [8]), из принципа идеализации вытекает существование конечных бмр в любом стандартном измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ и даже в булевой алгебре. Большинство приведенных ниже результатов верны для произвольной булевой алгебры, не обязательно являющейся алгеброй множеств. Итак, пусть в дальнейшем P — некоторое бмр $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Обозначим через P_s и P_n соответственно совокупности стандартных и нестандартных элементов P. Заметим, что если все одноточечные множества измеримы, то $P_s = \{\{x\} \mid x \in {}^\circ\mathcal{X}\}$.

Определение 5.2. Пусть $p_1, p_2 \in P$. Будем говорить, что p_1 *эквивалентно* p_2 и обозначать это $p_1 \sim p_2$, если $P \setminus \{p_1, p_2\} \cup \{p_1 \cup p_2\}$ — бмр. Элемент разбиения p_1 будем называть *укрупняемым*, если найдется отличный от него $p_2 \in P$ такой, что $p_1 \sim p_2$. В этом случае будем говорить, что p_2 *укрупняет* p_1.

Теорема 5.3. *Элемент бмр неукрупняем тогда и только тогда, когда он стандартен.*

Доказательство. Очевидно, что стандартные элементы разбиения неукрупняемы. Покажем, что любой нестандартный элемент бмр укрупняем. Пусть $p \in P_n$, обозначим $q = {}^*\{A \in {}^\circ\mathcal{A} \mid p \subset A\}$. Пусть $\mathcal{S}$ — некоторое стандартное конечное подмножество q и пусть $S = \bigcap \mathcal{S}$. Очевидно, $p \subset S$, но из того, что $S \in {}^\circ\mathcal{A}$ следует $p \neq S$. Тем самым найдется $p' \in P$ такой, что $p' \subset S$ и $p' \neq p$. Итак, $(\forall^{\mathrm{st\ fin}} \mathcal{S} \subset q)(\exists p' \in P)(p' \neq p \,\&\, (\forall A \in \mathcal{S})(p' \subset A))$. Отсюда по принципу идеализации следует, что найдется элемент $p' \in P$ отличный от p и содержащийся в любом стандартном множестве из q. Это значит, что p — требуемый. $\square$

В [8] показано, что вариация стандартной ограниченой измеримой функции на элементе бмр бесконечно мала.

Лемма 5.4. *Пусть $p_1, p_2 \in P$, тогда $p_1 \sim p_2$ равносильно тому, что для любой стандартной ограниченной функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ значения f на p_1 и p_2 примерно равны.*

Доказательство. Слева направо утверждение вытекает из того, что $P \setminus \{p_1, p_2\} \cup \{p_1 \cup p_2\}$ — бмр. Обратное можно легко получить, если рассмотреть характеристические фукции стандартных измеримых множеств. $\square$

Пусть теперь на $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ задана стандартная мера μ. Обозначим $P_+ = \{p \in P \mid \mu(p) > 0\}$; $P_0 = \{p \in P \mid \mu(p) = 0\}$; $\mathcal{A}_+ = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) > 0\}$; $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0\}$. Легко заметить, что все точки элементов P_+ случайны. Элементы P_+ будем называть существенными элементами БМП.

Определение 5.5. Пусть $p \in P_+$. Назовем его *существенно укрупняемым*, если найдется укрупняющий его $p' \in P_+$. Назовем p *существенно делимым*, если найдутся непересекающиеся $p_1, p_2 \in \mathcal{A}_+$ такие, что $p = p_1 \cup p_2$.

Теорема 5.6. *Следующие утверждения эквивалентны:*
(1) Любой существенный элемент бмр существенно делим.
(2) Любой существенный элемент бмр существенно укрупняем.
(3) Мера μ безатомна, т.е. $\forall A \in \mathcal{A}_+ \quad \exists B \in \mathcal{A}_+ \quad B \subset A \,\&\, \mu(B) < \mu(A)$.

Доказательство. Чтобы доказать импликацию из (1) в (2) рассмотрим существенный элемент p. По условию он существенно делим. Положим $q = {}^*\{A \in {}^\circ\mathcal{A} \mid p \subset A\}$; пусть $\mathcal{S}$ — некоторое стандартное конечное подмножество q, и пусть $S = \bigcap \mathcal{S}$. Очевидно, $p \subset S \in {}^\circ q$. Из существенной делимости p следует, что найдется измеримое множество $p' \in P$ такое, что $0 < \mu(p') < \mu(p) \leqslant \mu(S)$. По принципу переноса найдется стандартное $B \subset S$ такое, что B и $S \setminus B$ лежат в ${}^\circ\mathcal{A}_+$. Очевидно $p \subset B$ либо $p \subset S \setminus B$; пусть $p \subset B$. Легко заметить, что найдется существенный элемент p'' лежащий в $S \setminus B$. Тем самым, $(\forall^{\mathrm{st\ fin}} \mathcal{S} \subset q)(\exists p'' \in P_+)(p'' \neq p \,\&\, (\forall A \in \mathcal{S})(p'' \subset A))$, откуда по принципу идеализации следует, что найдется существенный элемент бмр P, укрупняющий p.

Чтобы доказать импликацию (2) $\Rightarrow$ (3), возьмем произвольное стандартное $A \in \mathcal{A}_+$. Найдется $p \in P_+$ такой, что $p \subset A$. Из существенной укрупняемости p следует, что существует $p' \in P_+$, лежащий в $A \setminus p$, откуда $\mu(p) < \mu(A)$. Теперь, дважды применяя принцип переноса, получаем требуемое.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна. $\square$

Пусть теперь мера μ счетно-аддитивна, а бмп P конечно. В работе [8] Леб вводит отображение $T_0 : {}^\circ L_\infty \to \mathbb{R}^P$ следующим образом: выберем в каждом $p \in P_+$ точку c_p; для $f \in {}^\circ L_\infty$ положим $(T_0 f)_p = f(c_p)$ для $p \in P_+$ и $(T_0 f)_p = 0$ для $p \in P_0$.

Леб доказывает в в [8], что вектор $\rho \in \mathbb{R}^P$ равен $T_0 f$ для некоторой $f \in {}^\circ L_\infty$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

(1) $\rho_p = 0$ для $p \in P_0$;

(2) величина $\max\limits_{p \in P} |\rho_p|$ околостандартна;

(3) $\forall p \in P$ и $\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0$, $\exists^{\mathrm{st}} A \in \mathcal{A}$ такое, что $p \subset A$ и $|\rho_p - \rho_{p'}| < \varepsilon$ для любого $p' \in P_+$ содержащегося в A.

Лемма 5.7. *Условие (3) равносильно следующеме условию:*

(3′) *Для любых $p_1, p_2 \in P_+ \quad p_1 \sim p_2$ влечет $\rho_{p_1} \approx \rho_{p_2}$.*

Доказательство. (3′) вытекает из (3), поскольку иэ $\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0 \quad |\rho_{p_1} - \rho_{p_2}| < \varepsilon)$ следует $\rho_{p_1} \approx \rho_{p_2}$. Обратное докажем от противного. Предположим, $(\exists^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0)(\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathcal{A})(p \subset A \to (\exists p' \in P_+ \quad p' \subset A \,\&\, |\rho_p - \rho_{p'}| \geqslant \varepsilon))$. Пусть $q = {}^*\{A \in {}^\circ\mathcal{A} \,|\, p \subset A\}$; пусть $\mathcal{S}$ — стандартное конечное подмножество q и $S = \bigcap \mathcal{S}$. По предположению найдется существенный $p \subset S$ такой, что $|\rho_p - \rho_{p'}| \geqslant \varepsilon$. По принципу идеализации найдется элемент $p' \in P_+$, удовлетворяющий условию $(\forall A \in {}^\circ q)(p' \subset A \& |\rho_p - \rho_{p'}| \geqslant \varepsilon)$, что противоречит (3′). □

Пусть P — бмр стандартного измеримого пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Объединение эквивалентных элементов P будем называть монадой: $m_p = \bigcup \{p' \in P \,|\, p' \sim p\}$. Легко заметить, что $\mathfrak{M} = \{m_p\}_{p \in P}$ — внешнее разбиение $(\mathcal{X}, {}^\circ\mathcal{A})$, т.е. $\mathfrak{M}$ — разбиение $\mathcal{X}$ на непересекающиеся монады и $\forall A \in {}^\circ\mathcal{A} \quad A = \bigcup \{m \in \mathfrak{M} \,|\, m \subset A\}$.

Лемма 5.8. *Разбиение $\mathfrak{M}$ совпадает с разбиением, порожденным ${}^\circ\mathcal{A}$.*

Доказательство. С одной стороны, если $x_1, x_2 \in m \in \mathfrak{M}$, то найдутся $p_1, p_2 \subset m$ такие, что $x_i \in p_i \in P \quad (i = 1, 2)$. Тогда $p_1 \sim p_2$, а значит $P \setminus \{p_1, p_2\} \cup \{p_1 \cup p_2\}$ — бмр, следовательно, для любого стандартного $A \in \mathcal{A}$ либо $p_1 \cup p_2 \subset A$, либо $(p_1 \cup p_2) \cap A = \emptyset$, т.е. x_1 и x_2 не разделяются стандартными измеримыми множествами.

С другой стороны, если x_1 и x_2 не разделяются множествами из ${}^\circ\mathcal{A}$, то содержащие их элементы P, очевидно, эквивалентны. □

Далее мы покажем, что фактор пространства $(\mathcal{X}, {}^\circ\mathcal{A})$ по разбиению $\mathfrak{M}$ (или, что то же самое, по эквивалентности “$\sim$”) изоморфен стандартному ядру стоуновского компакта Q. Определим фактор-алгебру $\mathfrak{A} = {}^\circ\mathcal{A}/\mathfrak{M}$, пусть $\theta : {}^\circ\mathcal{A} \to \mathfrak{A}$ — естественный изоморфизм булевых алгебр $\theta(A) = \{m \in \mathfrak{M} \,|\, m \subset A\}$. Рассмотрим измеримое пространство $(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$. Для $m \in \mathfrak{M}$ положим $\varphi(m) = {}^*\{A \in {}^\circ\mathcal{A} \,|\, m \subset A\}$, для $A \in {}^\circ\mathcal{A}$ обозначим $\overline{\varphi}(\theta(A)) = {}^*\{\varphi(m) \,|\, m \in \theta(A)\} = {}^*\{\varphi(m) \,|\, m \subset A\}$.

Лемма 5.9. *Имеют место следующие утверждения:*
(1) φ *— биекция* $\mathfrak{M}$ *на* ${}^\circ Q$*, причем* $m = \bigcap {}^\circ\varphi(m)$, $\varphi^{-1}(q) = \bigcap {}^\circ q$.
(2) $\overline{\varphi}$ *— булев изоморфизм* $\mathfrak{A}$ *на* ${}^\circ ClopQ$*, причем* $(\overline{\varphi} \circ \theta)(A) = \iota(A)$ *для всякого* $A \in {}^\circ\mathcal{A}$.

Доказательство. Предоставляем читателю проверить (1). Поскольку θ и ι — изоморфизмы, для доказательства (2) достаточно показать, что $\forall^{\mathrm{st}} A \in \mathcal{A}$ $\overline{\varphi}(\theta(A)) = \iota(A)$. Но $q \in {}^\circ\iota(A) \Leftrightarrow A \in {}^\circ q \Leftrightarrow \varphi^{-1}(q) = \bigcap {}^\circ q \subset A \Leftrightarrow q = \varphi(\varphi^{-1}(q)) \in \{\varphi(m) \,|\, m \subset A\}$ для $q \in {}^\circ Q$ и $A \in {}^\circ\mathcal{A}$. Тем самым, ${}^\circ\iota(A) = \{\varphi(m) \,|\, m \subset A\}$, откуда $\iota(A) = \overline{\varphi}(\theta(A))$. □

Замечание 5.10. В робинсоновском нестандартном анализе лемма 3 выглядит несколько эффектнее, а именно: если положить $\varphi(m) = \{A \in \mathcal{A} \,|\, m \subset {}^*A\}$, то φ осуществляет измеримый изоморфизм $(\mathfrak{M}, \mathfrak{A})$ на $(Q, \mathrm{Clop}Q)$.

Замечание 5.11. Из лемм 8 и 9 легко вытекает отмеченный в [5] факт, что в топологии, порожденной $\mathcal{A}$, $\mathcal{X}$ является вполне несвязным компактом.

К настоящему моменту у читателя могло сложиться впечатление, что все элементы P, лежащие в одной монаде, равноправны. Однако далее будет показано что это не так. Оказывается, среди элементов P, составляющих монаду, есть выделенный (будем называть его *центральным* элементом). Мы увидим, что свойства мер в значительной степени определяются их значениями на центральных элементах.

Для $p \in P$ рассмотрим стандартную двузначную меру δ^p: для $A \in {}^\circ\mathcal{A}$ положим

$$\delta^p(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \subset A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, если $p_1, p_2 \subset m \in \mathfrak{M}$, то $\delta^{p_1} = \delta^{p_2}$, т.е. элементы P, лежащие в одной монаде, порождают одну и ту же двузначную меру; обозначим ее δ^m. Но каждая стандартная двузначная мера принимает значение 1 лишь на одном элементе P и зануляется на всех остальных. Обозначим через p_m тот элемент P, для которого $\delta^m(p_m) = 1$. Очевидно, $p_m \subset m$ (см., например, [8]). Будем называть элементы множества $P_c = \{p_m \,|\, m \in \mathfrak{M}\}$ *центральными элементами* P.

Чтобы понять, что выделяет центральные элементы среди всех остальных, нам понадобится описанная в лемме 9 связь разбиения $\mathfrak{M}$ и стоуновского компакта Q. Заметим прежде всего, что $\overline{P} = \{\iota(p)\}_{p \in P}$ — бмр измеримого пространства $(Q, \mathrm{Clop}Q)$.

Лемма 5.12. *Для любого* $p \in P$ *множество* $\iota(p) \subset Q$ *содержит не более одной стандартной точки.*

Доказательство. Пусть $q_1, q_2 \in {}^\circ Q$. Тогда найдется множество $A \in {}^\circ\mathcal{A}$ такое, что $A \in q_1$ и $\mathcal{X} \setminus A \in q_2$. Стандартное множество $\iota(A)$ разделяет точки q_1 и q_2, поэтому они не могут лежать в одном $\iota(p)$. □

Легко заметить, что множества $\overline{m} = \bigcup\{\iota(p) \,|\, p \subset m\}$ являются монадами бмр $\overline{P}$.

Лемма 5.13. *Для любой монады $m \in \mathfrak{M}$ выполнено $\varphi(m) \in \overline{m}$. Более того, $\overline{m}$ является монадой стандартной точки $\varphi(m)$ в топологии Q.*

Доказательство. Пусть $m \in \mathfrak{M}$. Поскольку $\overline{P}$ — разбиение Q, найдется $p \in P$ такой, что $\varphi(m) \in \iota(p)$. Для любого стандартного $A \in \mathcal{A}$, содержащего m, по определению φ выполнено $\varphi(m) \in \iota(A)$. Но тогда $\iota(p) \subset \iota(A)$, откуда $p \subset A$. В силу произвольности выбора A получаем $p \subset m$ и, следовательно, $\iota(p) \subset \overline{m}$. Тем самым $\varphi(m) \in \iota(p) \subset \overline{m}$.

Любое стандартное открыто-замкнутое множество, содержащее $\varphi(m)$, содержит и $\overline{m}$, поскольку $\overline{P}$ является бмр измеримого пространства $(Q, \mathrm{Clop}Q)$. Поэтому $\overline{m}$ содержится в топологической монаде $\varphi(m)$. Если $q \notin \overline{m}$, то найдется $p' \subset m' \neq m$ такое, что $q \in \iota(p') \subset \overline{m'}$. Тогда q содержится в топологической монаде $\varphi(m')$ и, в силу хаусдорфовости Q, точка q не попадает в топологоческую монаду $\varphi(m)$. □

Итак, теперь мы знаем, что в каждой монаде $\overline{m}$ есть ровно одна стандартная точка. Оказывается, именно те $\iota(p)$, в которых лежат стандартные точки Q, соответствуют центральным элементам P, что и показывает следующяя теорема:

Теорема 5.14.
(1) $p \in P_c \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(m_p) \in \iota(p)$;
(2) $p' \in P \setminus P_c \quad \Leftrightarrow \quad \iota(p')$ *не содержит стандартных точек.*

Доказательство. Заметим, что всякой двузначной мере δ на $\mathcal{A}$ соответствует ультрафильтр $q_\delta = \{A \in \mathcal{A} \,|\, \delta(A) = 1\}$ и, наоборот, каждому ультрафильтру q соответствует двузначная мера, принимающяя значение 1 на множествах из q. Таким образом

$$p \in P_c \quad \Leftrightarrow \delta^p(p) = 1 \Leftrightarrow p \in q_{\delta^p} \Leftrightarrow q_{\delta^p} \in \iota(p),$$

но

$$q_{\delta^p} = \{A \in \mathcal{A} \,|\, \delta^p(A) = 1\} = {}^*\{A \in {}^\circ\mathcal{A} \,|\, \delta^p(A) = 1\} = {}^*\{A \in {}^\circ\mathcal{A} \,|\, p \subset A\} =$$
$${}^*\{A \in {}^\circ\mathcal{A} \,|\, m_p \subset A\} = \varphi(m_p),$$

откуда следует (1).

Для доказательства (2) от противного, предположим существование стандартного $q \in \iota(p')$. Пусть $m = \varphi^{-1}(q)$, $\quad p = p_m \in P_c$. Тогда $m = m_p$ и $q = \varphi(m_p) \in \iota(p)$. □

Далее мы покажем, что свойства стандартной меры и ее поведение на элементах бмр существенно зависит от ее значений на центральных элементах. Пусть далее μ — стандартная конечно-аддитивная мера на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Будем для простоты считать, что μ конечна. Через $\overline{\mu}$ будем обозначать меру на $(Q, \mathrm{Clop}Q)$, заданную по правилу $\overline{\mu}(D) = \mu(\iota^{-1}(D))$ для $D \in \mathrm{Clop}Q$.

Теорема 5.15. *Пусть $p \in P_c$ и $\mu(p) \in {}^\circ\mathbb{R}$. Тогда*
(1) $\mu(p') = 0$ для любого p', эквивалентного p.
(2) Найдется стандартное множество $A \in \mathcal{A}$, содержащее m_p, такое, что $\mu(A) = \mu(p)$.

Доказательство. Рассмотрим меру $\overline{\mu}$ на $(Q, \mathrm{Clop}Q)$, заданную следующим образом: $\overline{\mu}(D) = \mu(\iota^{-1}(D))$ для $D \in \mathrm{Clop}Q$. Если для всякого $A \in {}^\circ\mathcal{A} \quad m_p \subset A$ влечет $\mu(A) > \mu(p)$, то для любого стандартного $D \in \mathrm{Clop}Q \quad \varphi(m_p) \in D$ влечет $\overline{\mu}(D) > \mu(p)$. Так как $\varphi(m_p)$ — стандартная точка, то по принципу переноса $\forall D \in \mathrm{Clop}Q$ из $\varphi(m_p) \in D$ следует $\overline{\mu}(D) > \mu(p)$. Но это противоречит тому, что $\varphi(m_p) \in \iota(p)$ и $\overline{\mu}(\iota(p)) = \mu(p)$. Полученное противоречие доказывает (2). (1) очевидно из (2). □

Теорема 5.16. *Пусть p — центральный элемент P, тогда для любого стандартного положительного ε найдется стандартное измеримое множество A, содержащее m_p, такое, что $\mu(A) - \mu(p) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. аналогично доказательству теоремы 15. Фиксируем стандартное положительное ε и для всякого $A \in {}^\circ\mathcal{A}$ такого, что $m_p \subset A$, выполнено $\mu(A) \geqslant \varepsilon + {}^\circ\mu(p)$. Это значит, что для любого $D \in {}^\circ\mathrm{Clop}Q$ из $\varphi_{m_p} \in D$ следует $\overline{\mu}(D) \geqslant \varepsilon + {}^\circ\mu(p)$. После примерения принципа переноса получаем противоречие $\mu(p) = \overline{\mu}(\iota(p)) \geqslant \varepsilon + {}^\circ\mu(p)$; откуда следует требуемое. □

Следствие 5.17. *Мера любого нецентрального элемента бесконечно мала. Более того, мера любого измеримого подмножества монады m, ι-образ которого не содержит $\varphi(m)$, бесконечно мала.*

Доказательство. Пусть $p_0 \in \mathcal{A}, \quad p_0 \subset m$ и $\varphi(m) \notin \iota(p_0)$. Тогда, очевидно, $P_0 = \{p \cap p_0, p \setminus p_0 \,|\, p \in P\}$ — бмр, причем m — его монада и $p_m \setminus p_0$ — ее центральный элемент. Зафиксируем стандартное положительное ε. По теореме 16 найдется множество $A \in {}^\circ\mathcal{A}$, содержащее m такое, что $\mu(A) - \mu(p_m \setminus p_0) \leqslant \varepsilon$. Но $p_0 \subset A \setminus (p_m \setminus p_0)$, откуда $\mu(p_0) < \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε получаем $\mu(p_0) \approx 0$. □

Лемма 5.18. *Для всякого $p \in P_c$ выполнено $\mu(p) \geqslant {}^\circ\mu(p)$.*

Доказательство. Очевидно, для всякого $D \in {}^\circ\mathrm{Clop}Q$, содержащего φ_{m_p}, мы имеем $\iota(p) \subset D$, а значит, ${}^\circ\mu(p) \leqslant \mu(D)$. По принципу переноса получаем $(\forall D \in \mathrm{Clop}Q)$ $(\varphi_{m_p} \in D \to {}^\circ\mu(p) \leqslant \mu(D))$. Подставив $\iota(p)$ в качестве D, получаем требуемое. □

Теорема 5.19. *Мера μ безатомна тогда и только тогда, когда она принимает бесконечно малые значения на всех элементах P.*

Доказательство. Рассмотрим стандартную конечную меру μ на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Пусть μ безатомна. Для $p \notin P_c$ имеем $\mu(p) \approx 0$ по теореме 16. Пусть $p \in P_c$. Из теоремы 4.2 вытекает, что найдутся измеримые множества p_1 и p_2 такие, что $p_1 \cap p_2 = 0$, $p_1 \cup p_2 = p$ и $\mu(p_i) = \frac{\mu(p)}{2}$ $(i = 1, 2)$. Очевидно, $P \setminus \{p\} \cup \{p_1, p_2\}$ — бмр, причем из теоремы 14 следует, что один из p_i является центральным, пусть это p_1, а второй — нет. Тогда $\mu(p_2) \approx 0$ по теореме 16, откуда $\mu(p) = 2\mu(p_2) \approx 0$.

Обратно, если μ не безатомна, то найдется множество $B \in {}^\circ\mathcal{A}_+$ удовлетворяющее условию $(\forall A \in \mathcal{A})((A \subset B \,\&\, \mu(A) \neq \mu(B)) \to (\mu(A) = 0))$. Рассмотрим двузначную меру $\delta(A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$. Найдется $p \in P$ такой, что $\delta(p) = 1$ и $\delta(p') = 0$ для всех $p' \in P$, отличных от p. Очевидно, что $p \subset B$. Тогда $\mu(p) = \mu(b) \cdot \delta(p) = \mu(B) \not\approx 0$, что противоречит предположению. □

Литература

[1] Гордон Е. И. О мерах Леба // Изв. вузов. Математика. 1991, № 2. С. 25–33.

[2] Гордон Е. И. О преобразовании Фурье в нестандартном анализе // Изв. вузов. Математика. 1989, № 2. С. 17–25.

[3] Гордон Е. И. Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$ // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 2. С. 45–59.

[4] Loeb P. A. Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 211. P. 113–122.

[5] Sun Y. On the theory of vector valued Loeb measures and integration // J. Funct. Anal. 1992. V. 104. P. 327–362.

[6] Wattenberg F. Nonstandard measure theory: avoiding pathological sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 250. P. 375–368.

[7] Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 89–95.

[8] Loeb P. A. A nonstandard representation of measurable spaces, L_∞, and L_∞^* // in “Contributions to Nonstandard Analysis” Amsterdam: North-Holland, 1972.

[9] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.

[10] Cutland N. J. Nonstandard measure theory and its applications // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15. P. 529–587.

[11] Halmos P. R. Measure theory. N.-Y.: Springer-Verlag, 1974.

[12] Henson C. W., Moore L. C. Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces // Nonstandard Analysis: Recent Development /Lecture Notes in Math. 1983, N 983.

[13] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. Москва: Мир, 1983.

[14] Marczewski E. (Szpilrajn) Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurable // Compt. Rend. Sean. Soc. Sien. Lettr. Varsovie 1937. V. 3. P. 39–68.

[15] Ulam S. Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre // Fund. Math. Warsaw 1930. V. 16. P. 140–150.

[16] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. Москва: Мир, 1970.

[17] Самородницкий А. А. Теория меры. Ленинград: Издательство ЛГУ, 1990.

Автор работы Троицкий В. Г.